

ФИПИ



ШКОЛЕ

2017

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

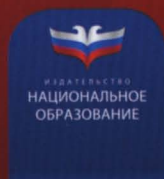
МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. В. ЯЩЕНКО



ФИПИ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ



ШКОЛЕ

2017

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. В. ЯЩЕНКО



ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАЦИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

Москва
2017

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

Е 31

**Издание подготовлено при научно-методической поддержке
Федерального института педагогических измерений (ФИПИ)**

*НОУ «Московский центр непрерывного математического образования
(МЦНМО)»*

**Авторы-составители:
И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко**

В сборнике использованы задачи, предложенные:

**И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, П. И. Захаровым, В. С. Панферовым,
М. Я. Пратусевичем, Д. А. Ростовским, А. Р. Рязановским, И. Н. Сергеевым,
В. А. Смирновым, К. М. Столбовым, А. С. Трепалиным, С. А. Шестаковым,
Д. Э. Шнолем, И. В. Яценко**

**ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые
Е 31 экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред.
И. В. Яценко. — М. : Издательство «Национальное
образование», 2017. — 256 с. — (ЕГЭ. ФИПИ — школе).**

ISBN 978-5-4454-0889-5

Серия «ЕГЭ. ФИПИ — школе» подготовлена разработчиками контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена. В сборнике представлены:

- 36 типовых экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2017 года;
- инструкция по выполнению экзаменационной работы;
- ответы ко всем заданиям;
- решения и критерии оценивания заданий 13–19.

Выполнение заданий типовых экзаменационных вариантов предоставляет обучающимся возможность самостоятельно подготовиться к государственной итоговой аттестации, а также объективно оценить уровень своей подготовки.

Учителя могут использовать типовые экзаменационные варианты для организации контроля результатов освоения школьниками образовательных программ среднего общего образования и интенсивной подготовки обучающихся к ЕГЭ.

**УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-4454-0889-5

© НОУ «Московский центр непрерывного
математического образования (МЦНМО)»,
2017

© ООО «Издательство «Национальное
образование», 2017

Содержание

Введение	4
Карта индивидуальных достижений обучающегося	6
Инструкция по выполнению работы	8
Типовые бланки ответов ЕГЭ	9
Вариант 1	11
Вариант 2	16
Вариант 3	21
Вариант 4	26
Вариант 5	31
Вариант 6	36
Вариант 7	41
Вариант 8	46
Вариант 9	51
Вариант 10	56
Вариант 11	61
Вариант 12	66
Вариант 13	71
Вариант 14	76
Вариант 15	81
Вариант 16	85
Вариант 17	90
Вариант 18	95
Вариант 19	100
Вариант 20	105
Вариант 21	110
Вариант 22	115
Вариант 23	120
Вариант 24	124
Вариант 25	129
Вариант 26	134
Вариант 27	139
Вариант 28	144
Вариант 29	149
Вариант 30	153
Вариант 31	157
Вариант 32	162
Вариант 33	167
Вариант 34	172
Вариант 35	177
Вариант 36	182
Ответы	186
Решения и критерии оценивания заданий 13–19	204

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит 36 полных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2016 года. Варианты подготовлены специалистами федеральной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В соответствии с документами, регламентирующими ЕГЭ по математике профильного уровня в 2017 году, каждый вариант содержит 19 заданий. Первая часть состоит из 12 заданий, вторая — из 7 заданий. Последние семь заданий подразумевают полное развёрнутое решение.

Семь вариантов даны с решениями, позволяющими проверить полноту и точность Ваших рассуждений. Ответы имеются ко всем заданиям.

В книге приведены типовые бланки ответов ЕГЭ, а также дана карта индивидуальных достижений обучающегося, которую можно использовать для отслеживания динамики результативности выполнения заданий типовых экзаменационных вариантов.

Если Вы собираетесь поступить в вуз на техническую или экономическую специальность и Вам нужен высокий балл на ЕГЭ по математике, эта книга для Вас.

Если Вы планируете продолжать своё математическое образование и претендуете на 90–100 баллов на ЕГЭ по математике, то Вам эта книга также будет полезна.

Как пользоваться сборником

Если Ваша цель — подтвердить свою школьную оценку и самооценку и получить хороший балл по математике для поступления в вуз, Ваш экзамен состоит из заданий 1–15. Все эти задания являются стандартными с точки зрения школьной программы. Помимо заданий практико-ориентированного блока здесь предлагаются задачи на понимание основных фактов и идей школьного курса математики, а также задачи, где нужно решить уравнения, найти элементы пространственной фигуры, исследовать функцию и т.п. Вы достигнете своей цели тренировкой, тренировкой и тренировкой. Обратите также внимание на задания 16 и 17. Они, конечно, посложнее предыдущих. Здесь уже нужно подумать, пофантазировать.

Если Ваша цель — поступить на математическую специальность и Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ, тогда Вы должны уверенно решать задания 1–15 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются в простых заданиях по небрежности). Вам нужно уметь выполнять (может быть, с некоторыми недочётами) задания 16 и 17. Основной объект Вашего внимания — задание 18, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи, видеть за уравнением фигуру, за рисунком — решение уравнений и их систем; умения вообразить взаимное расположение движущихся по плоскости линий и фигур.

Задание 19 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний. Все необходимые сведения о целых числах и делимости изучаются в 5–7-х классах. Вопрос не в знаниях, а в том, как их применить. Здесь важно сочетание опыта, фантазии и подготовки. Помощь окажут сборники олимпиадных заданий, популярные математические статьи и журналы. Небесполезным, надеемся, будет и наш сборник.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

Обратите внимание на то, что некоторые варианты похожи друг на друга. Будем говорить, что такие варианты собраны по одному плану. Если для какого-то варианта

приведены решения задач, то варианты, собранные по тому же плану, имеют аналогичные решения. Можно предложить два способа использования готовых решений при подготовке.

Вы не можете решить задачу: в этом случае посмотрите решение и тщательно разберитесь в нём. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что там написано. Решения не очень подробные. Нужно проделать самостоятельно пропущенные выкладки, не только понять ход решения, но и снять возникающие вопросы «почему так». Когда Вы разберётесь в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, осмысленно и осознанно воспроизводя все логические шаги и вычисления. Ваш вариант решения будет гораздо больше по объёму, поскольку он будет подробнее. Затем возьмите вариант того же плана, но без решения и решите в этом варианте аналогичное задание, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, может быть, улучшить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

Вы решили задание самостоятельно, и ответы совпали. Это не означает, что Ваше решение не содержит упущений или логических ошибок. Сравните своё решение с решением, предложенным авторами. Попробуйте определить, какое решение Вам нравится больше, разобраться, в чём решения различаются, а в чём схожи. Проверьте, рассмотрели ли Вы все нужные случаи, убедительно ли сумели объяснить все свои построения и преобразования.

Карта индивидуальных достижений обучающегося

Впишите баллы, полученные Вами при выполнении типовых экзаменационных вариантов, в таблицу.

Вариант Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
19																		
Сумма баллов																		

Задание \ Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
19																		
Сумма баллов																		

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 10 - 0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

➤ **Бланк ответов № 2**

Код региона	Код предмета	Название предмета

Резерв-6

Дополнительный
бланк ответов № 2

Лист №

1

11411-11416

Перепишите значение полей «Код региона», «Код предмета», «Название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания с РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например 31. Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

ВАРИАНТ 1

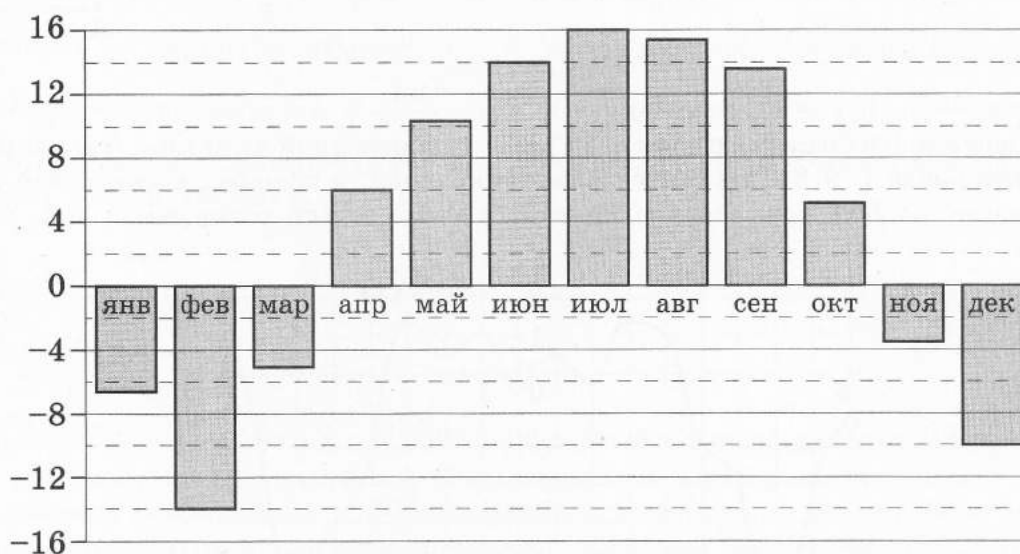
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Показания счётчика электроэнергии 1 марта составляли 58 134 кВт·ч, а 1 апреля — 58 234 кВт·ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за март, если 1 кВт·ч электроэнергии стоит 3 руб. 93 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

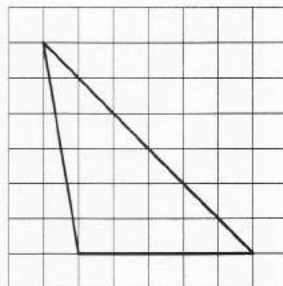
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в период с января по июнь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 30 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Голландии и 9 прыгунов из Колумбии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать прыгун из Голландии.

Ответ: _____.

5

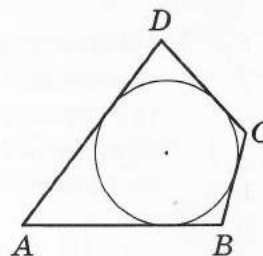
Найдите корень уравнения $\sqrt{44-7x} = 3$.

Ответ: _____.

6

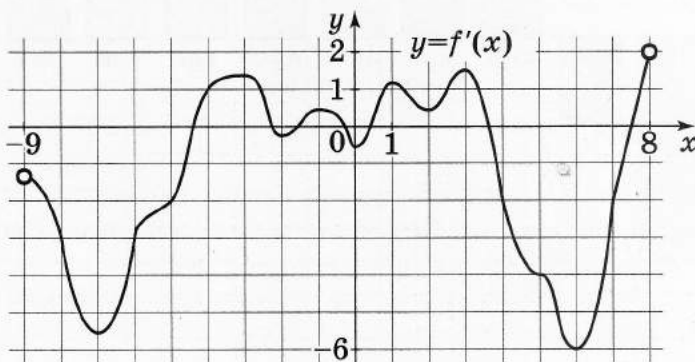
В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 33$, $CD = 18$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: _____.



7

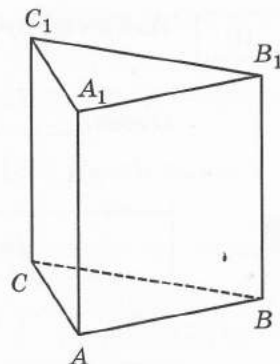
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 6$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B_1, A, B, C .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\log_3 2}{\log_3 11} + \log_{11} 5,5$.

Ответ: _____.

10

Груз массой 0,26 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 4$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 5 с после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11

Смешав 25-процентный и 95-процентный растворы кислоты и добавив 20 кг чистой воды, получили 40-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 20 кг воды добавили 20 кг 30-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 50-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 25-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

12

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 361}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $6\log_3^2(2\cos x) - 11\log_3(2\cos x) + 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\pi\right]$.

14

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 32, а боковое ребро BB_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$; $B_1L = 28$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой BM .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка M , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

Решите неравенство $\frac{2 \cdot 49^x - 16 \cdot 7^x + 11}{7(7^{x-1} - 1)} + \frac{5 \cdot 7^x - 36}{7^x - 8} \leq 2 \cdot 7^x + 3$.

16

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . Точка E принадлежит стороне AB , прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая BH параллельна прямой ED .

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 135^\circ$.

17

15-го января Аркадий планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Аркадию в общей сумме придётся выплатить больше 1,5 млн рублей.

18

При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{37x^2 - 12ax + 9} = 2x^2 - 2ax + 3$$

имеет ровно три различных корня? Найдите все возможные значения a .

19

В целочисленной последовательности $a_1 = 2$, a_2 , ..., a_{n-1} , $a_n = 336$ сумма любых двух соседних членов последовательности равна или 5, или 7, или 29.

- а) Приведите пример такой последовательности.
- б) Может ли такая последовательность состоять из 812 членов?
- в) Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

ВАРИАНТ 2

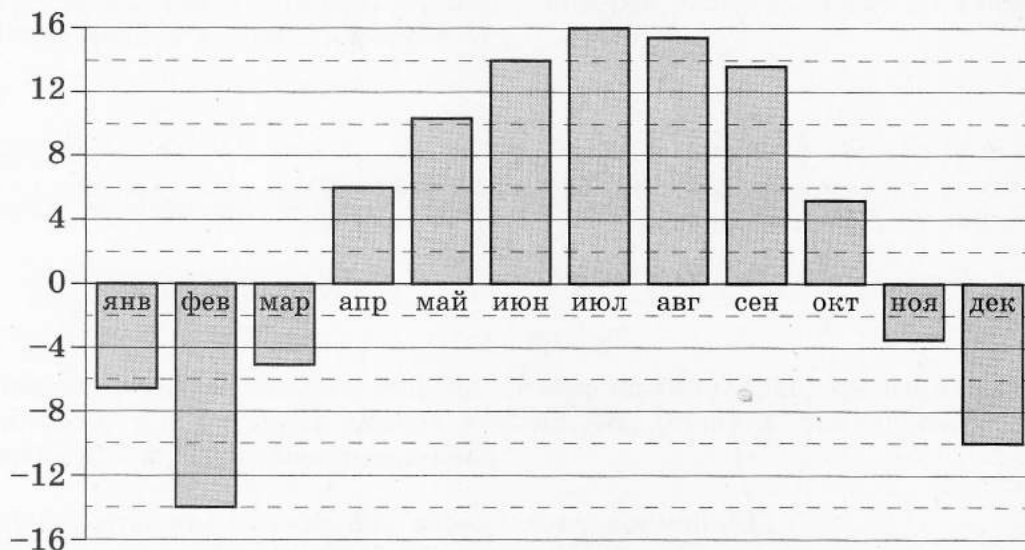
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Показания счётчика электроэнергии 1 мая составляли 37 192 кВт·ч, а 1 июня — 37 292 кВт·ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за май, если 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 руб. 17 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

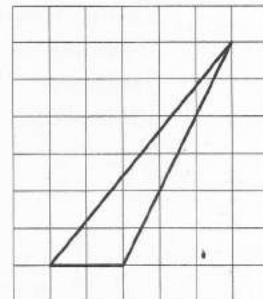
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с января по июнь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Голландии и 10 прыгунов из Колумбии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать прыгун из Голландии.

Ответ: _____.

5

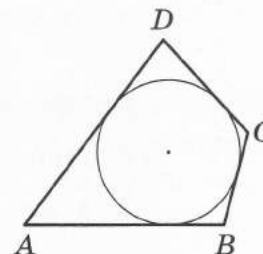
Найдите корень уравнения $\sqrt{53-4x} = 5$.

Ответ: _____.

6

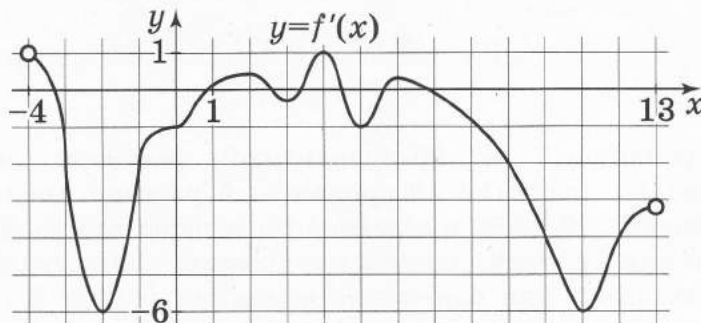
В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 27$, $CD = 15$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: _____.



7

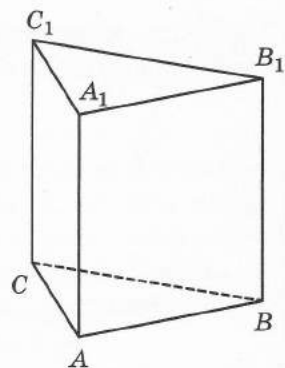
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 5. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, C_1, C .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\log_{13} 8}{\log_{13} 6} + \log_6 4,5$.

Ответ: _____.

10

Груз массой 0,14 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 6$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 11 с после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11

Смешав 30-процентный и 90-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 42-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 52-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 484}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4\log_2^2(2\sin x) - 8\log_2(2\sin x) + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 50, а боковое ребро BB_1 равно $5\sqrt{3}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=10$; $B_1L=38$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой BM .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка M , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .

- 15 Решите неравенство $\frac{25^x - 3 \cdot 5^x - 9}{5^x - 5} + \frac{7 \cdot 5^x - 60}{5^x - 9} \leq 5^x + 9$.

- 16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр $АН$. Точка E принадлежит стороне AB , прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая $ВН$ параллельна прямой ED .

б) Найдите отношение $ВН$ к ED , если $\angle BCD = 150^\circ$.

17 15-го января Алиса планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Алисе в общей сумме придётся выплатить больше 1,4 млн рублей.

18 При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{5x^2 + 16ax + 4} = x^2 + 4ax + 2$$

имеет ровно три различных корня? Найдите все возможные значения a .

19 В целочисленной последовательности $a_1 = 3, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = 109$ сумма любых двух соседних членов последовательности равна или 1, или 3, или 13.

- а) Приведите пример такой последовательности.
- б) Может ли такая последовательность состоять из 32 членов?
- в) Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

ВАРИАНТ 3

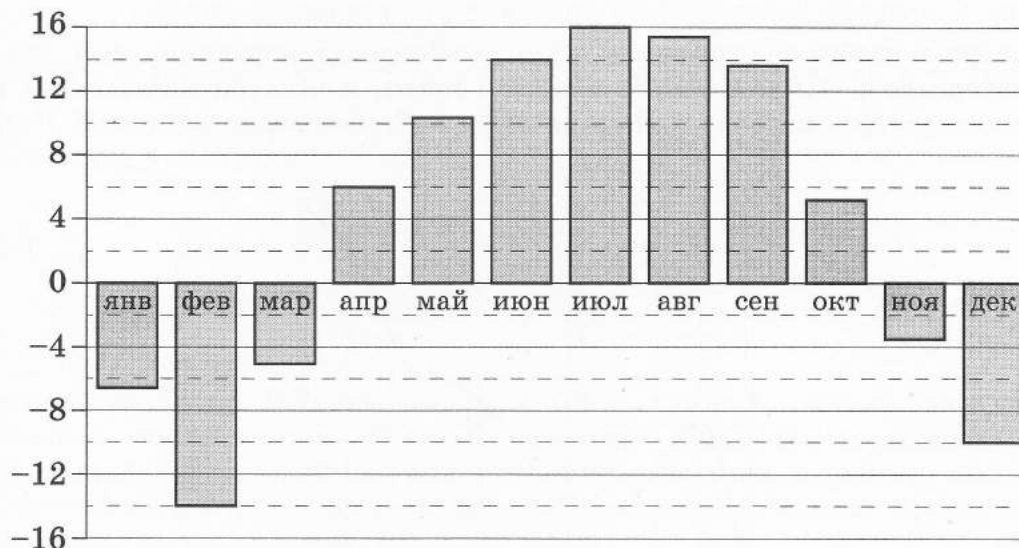
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 сентября составляли 254 куб. м воды, а 1 октября — 264 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за сентябрь, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 17 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

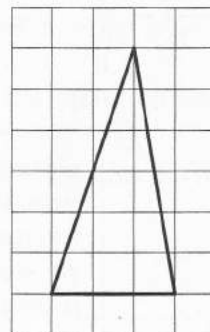
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в период с июня по декабрь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

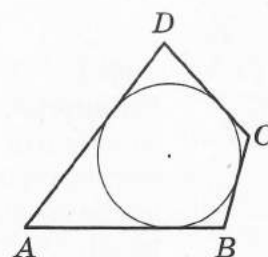
- 4 На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 12 из Польши и 6 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+37} = 11$.

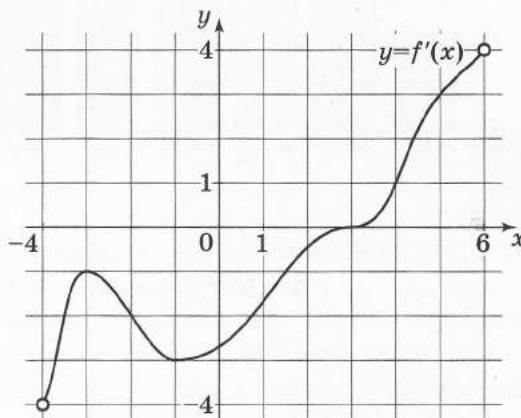
Ответ: _____.

- 6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 23$, $BC = 9$ и $CD = 12$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: _____.

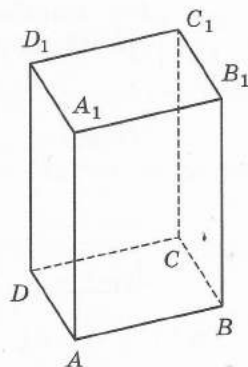
- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x - 7$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8

Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, B_1 .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $8 \log_{2,5} 7 \cdot \log_7 0,4$.

Ответ: _____.

10

Груз массой 0,6 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала наблюдения в секундах, $T = 4$ с — период колебаний, $v_0 = 3$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 120 с после начала наблюдения. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11

Имеется два сосуда. Первый содержит 70 кг, а второй — 30 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 35 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: _____.

12

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $4\log_9^2(2\sin x) - 17\log_9(2\sin x) + 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 16, а боковое ребро BB_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 6$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой BM .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости γ .

15

Решите неравенство $\frac{49^x - 9 \cdot 7^x + 10}{7^x - 1} + \frac{49^x - 11 \cdot 7^x + 33}{7^x - 6} \leq 2 \cdot 7^x - 13$.

16

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . В треугольнике MKC из вершины K проведена высота KH к стороне MC . Аналогично в треугольнике KMA из вершины M проведена высота ME к стороне AK .

а) Докажите, что прямая EH параллельна прямой AC .

б) Найдите отношение $\frac{EH}{AC}$, если $\angle ABC = 60^\circ$.

17

15-го января Вика планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,8	0,4	0,35	0,2	0,15	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Вике в общей сумме придётся выплатить меньше 1,6 млн рублей.

18

При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{4x^4 - 9x^2 + a^2} = 2x^2 - 3x + a$$

имеет ровно три различных корня? Найдите все возможные значения a .

19

Изначально на доске написаны числа 3 и 6. За один ход два числа, написанные на доске, стираются, а вместо них пишутся два других, одно из которых является суммой только что стёртых чисел, а второе равно $2x+2$, где x — одно из только что стёртых чисел.

- а) Может ли за несколько ходов на доске оказаться число 48?
- б) Может ли после 80 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 630?
- в) Сделали 519 ходов. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

ВАРИАНТ 4

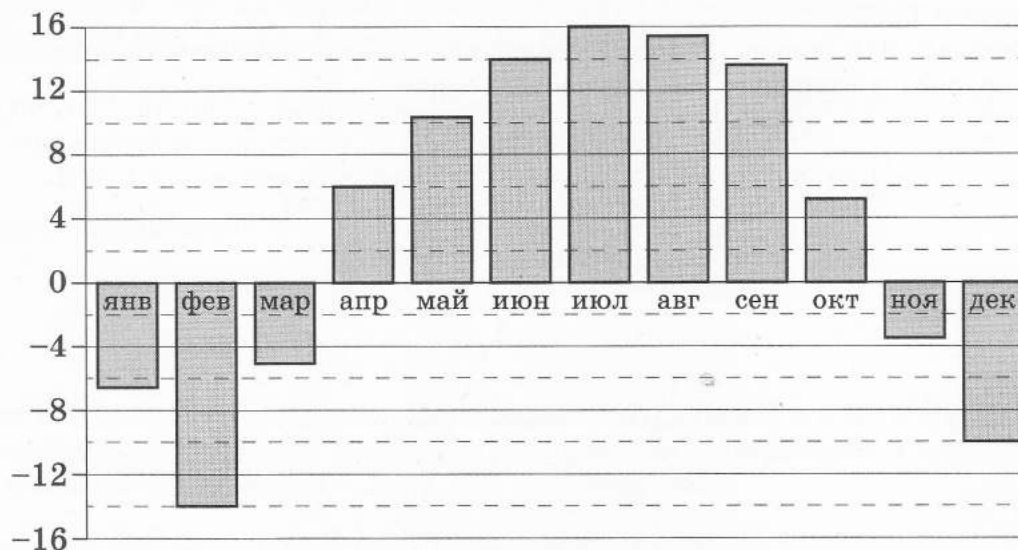
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 июля составляли 173 куб. м воды, а 1 августа — 183 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за июль, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 70 коп.? Ответ дайте в рублях.

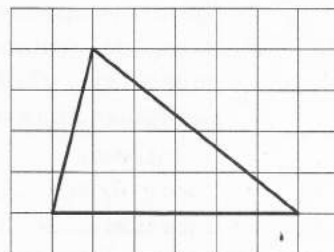
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с июля по декабрь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

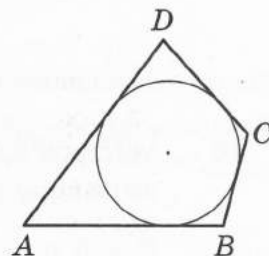
- 4 На конференцию приехали 8 учёных из Дании, 7 из Польши и 5 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+13} = 9$.

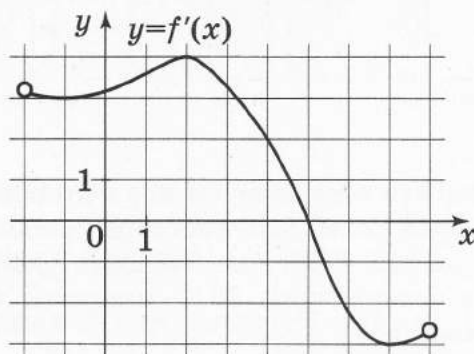
Ответ: _____.

- 6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=18$, $BC=12$ и $CD=13$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: _____.

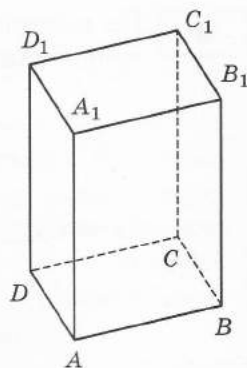
- 7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 8)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=2x+3$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8

Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1, C_1 .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $3 \log_{0,2} 8 \cdot \log_8 25$.

Ответ: _____.

10

Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала наблюдения в секундах, $T = 6$ с — период колебаний, $v_0 = 5$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 90 с после начала наблюдений. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11

Имеется два сосуда. Первый содержит 50 кг, а второй — 30 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 25% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 169}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4\log_4^2(2\sin x) - 9\log_4(2\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

- 14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 10, а боковое ребро BB_1 равно $\sqrt{15}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 7$; $B_1L = 1$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

- а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой BM .
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости γ .

- 15 Решите неравенство $\frac{2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x}{2^x - 2} + \frac{4^x - 2^x - 21}{2^x - 5} \leq 3 \cdot 2^x + 5$.

- 16 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . В треугольнике MKS из вершины K проведена высота KH к стороне MS . Аналогично в треугольнике KMA из вершины M проведена высота ME к стороне AK .

- а) Докажите, что прямая EH параллельна прямой AC .
б) Найдите отношение $\frac{EH}{AC}$, если $\angle ABC = 45^\circ$.

17 15-го января Вика планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,4	0,2	0,1	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Вике в общей сумме придётся выплатить меньше 1,3 млн рублей.

18 При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + 4a^2} = x^2 - x + 2a$$

имеет ровно три различных корня? Найдите все возможные значения a .

19 Изначально на доске написаны числа 4 и 6. За один ход два числа, написанные на доске, стираются, а вместо них пишутся два других, одно из которых является суммой только что стёртых чисел плюс один, а второе равно $2x+2$, где x — одно из только что стёртых чисел.

- а) Может ли за несколько ходов на доске оказаться число 51?
- б) Может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 1999?
- в) Сделали 789 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

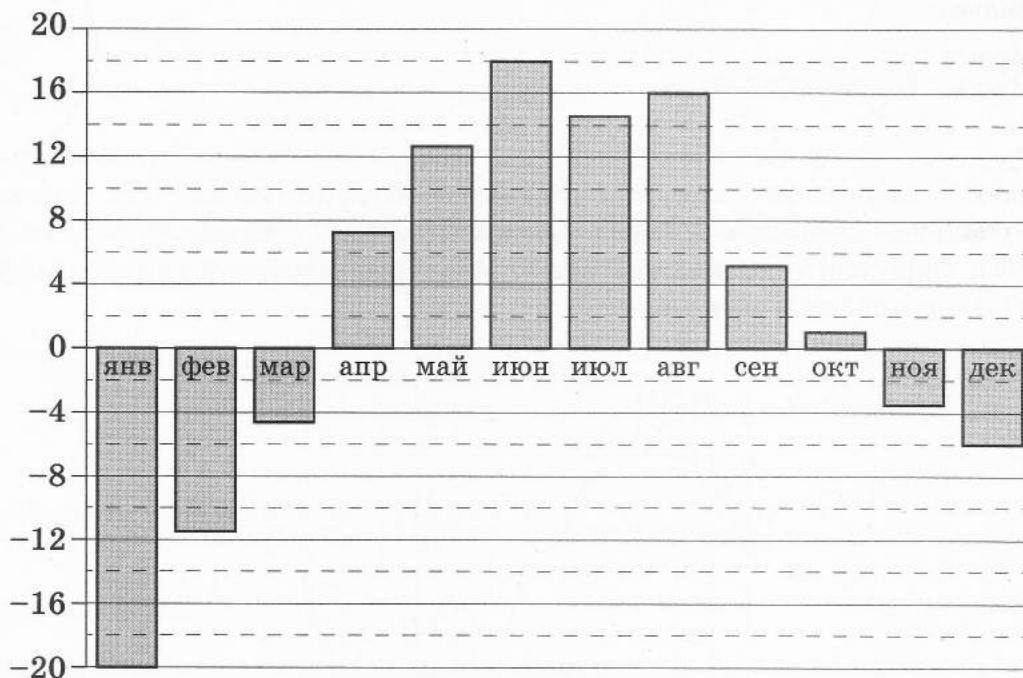
1

Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 18 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 45 человек. Какое наименьшее количество шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: _____.

2

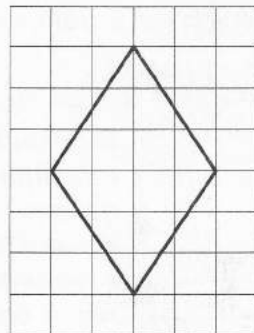
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура не превышала -4 градусов Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 30 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: _____.

5

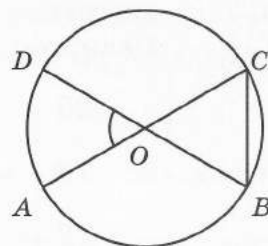
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{8-7x} = 32$.

Ответ: _____.

6

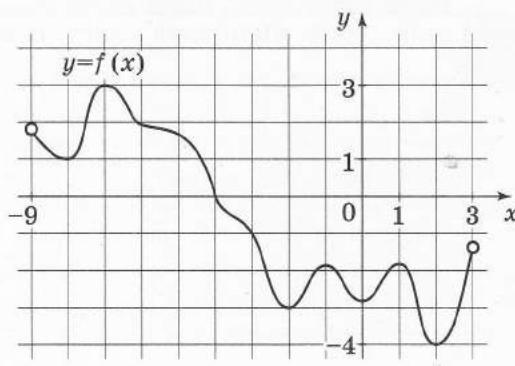
Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 44° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



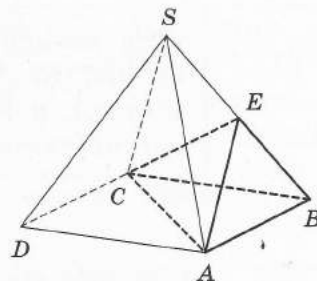
7

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=5$.



Ответ: _____.

- 8 Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 68. Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{22\sin 17^\circ \cdot \cos 17^\circ}{\sin 34^\circ}$.

Ответ: _____.

- 10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 17t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: _____.

- 11 Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 45% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 24 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была больше массы второго?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 14x + 24 \cdot \ln x - 5$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\cos 2x - 1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

14

Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, сторона AB основания которой равна 7, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{14}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$; $C_1 L = 1$. Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой BD .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой $A_1 C$.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой является точка C , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

Решите неравенство $4^x - 9 + \frac{11 \cdot 4^x - 52}{16^x - 7 \cdot 4^x + 10} \leq \frac{1}{4^x - 5}$.

16

В равнобедренном треугольнике ABC , где $\angle B$ — тупой, на продолжение стороны BC опущена высота $АН$. Из точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что $AM = MK$.

б) Найдите MK , если $AB = 13$, $AC = 24$.

17

В июле 2016 года Глеб планирует взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата следующие:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,75S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат Глеба будет меньше 4 млн рублей.

18

При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{2\sqrt{x}-a} + \frac{a-3}{\sqrt{2\sqrt{x}-a}} = 4$$

имеет ровно два различных корня? Найдите все возможные значения a .

19

На доске написаны числа 10, 11, 12, 13, ..., 50. За один ход разрешается стереть произвольные четыре числа таких, что их сумма больше 134 и не равна ни одной из сумм четвёрок чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- Можно ли сделать 5 ходов по описанным правилам? Если да, то приведите пример этих ходов.
- Можно ли сделать 10 ходов по описанным правилам?
- Какое наибольшее число ходов можно сделать?

ВАРИАНТ 6

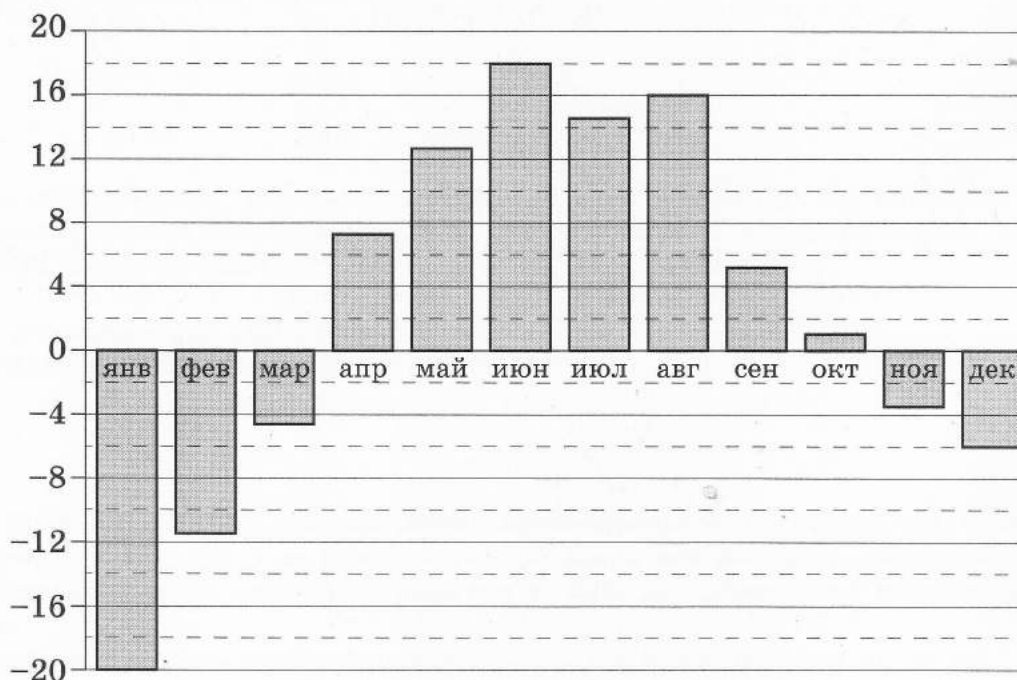
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Теплоход рассчитан на 450 пассажиров и 16 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 40 человек. Какое наименьшее количество шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: _____.

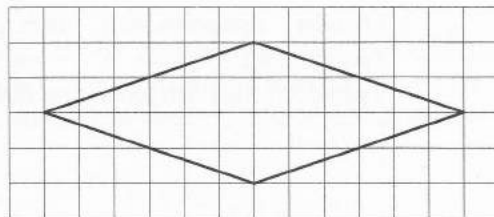
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура была больше 14 градусов Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 28 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. Все выступления поровну распределены между конкурсными днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится во второй день конкурса?

Ответ: _____.

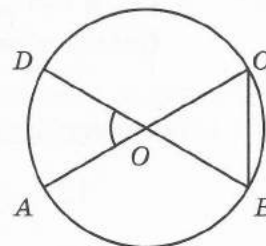
5

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11} = 125$.

Ответ: _____.

6

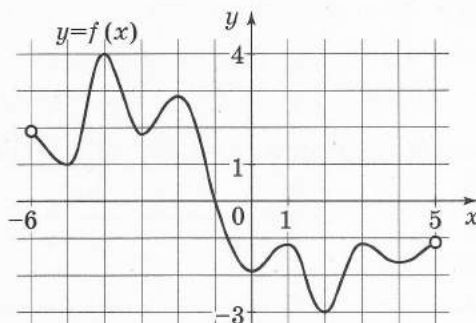
Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 50° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

7

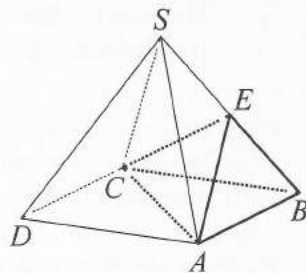
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$.



Ответ: _____.

8

Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 132. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{38 \sin 71^\circ \cdot \cos 71^\circ}{\sin 142^\circ}$.

Ответ: _____.

10

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 26t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 7 метров?

Ответ: _____.

11

Имеется два сплава. Первый содержит 20% никеля, второй — 45% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 90 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была больше массы второго?

Ответ: _____.

12

Найдите точку максимума функции $y = 1,5x^2 - 39x + 120 \cdot \ln x - 2$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $-\cos 2x - 1 = 3 \cos \left(\frac{7\pi}{2} - x \right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

14

Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, сторона AB основания которой равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AD и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $DK = C_1 L = 1$. Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой BD_1 .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1 , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

Решите неравенство $3^x + 1 + \frac{14 \cdot 3^x - 60}{9^x - 10 \cdot 3^x + 24} \leq \frac{2}{3^x - 4}$.

16

В равнобедренном треугольнике ABC , где $\angle B$ — тупой, на продолжение стороны BC опущена высота AH . Из точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что $AM = MK$.

б) Найдите MK , если $AB = 10$, $AC = 12$.

17

В июле 2016 года Инга планирует взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата следующие:

- каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат Инги будет меньше 5 млн рублей.

18

При каких значениях a уравнение

$$2\sqrt{x^4 \cdot 2^x - a} + \frac{2a-1}{\sqrt{x^4 \cdot 2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня? Найдите все возможные значения a .

19

На доске написаны числа 2, 5, 8, 11, ..., 74. За один ход разрешается стереть произвольные три числа таких, что их сумма больше 137 и не равна ни одной из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Можно ли сделать 4 хода по описанным правилам? Если да, то приведите пример этих ходов.
- б) Можно ли сделать 8 ходов по описанным правилам?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

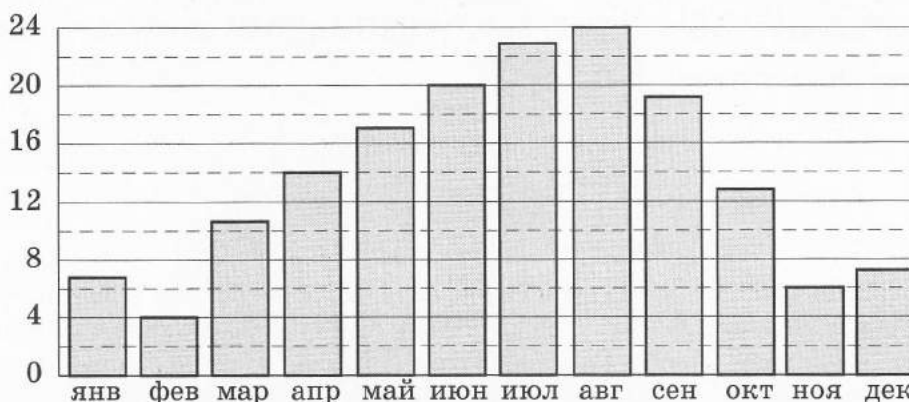
1

Для ремонта квартиры требуется 59 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

Ответ: _____.

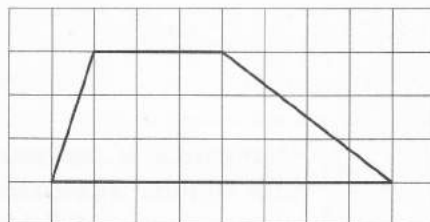
2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: _____.

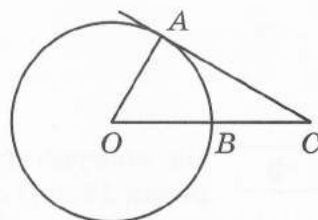
- 4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_2(7-x) = 5$.

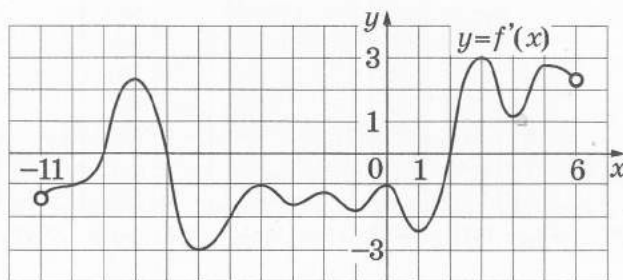
Ответ: _____.

- 6 Угол ACO равен 27° , где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



Ответ: _____.

8

В цилиндрический сосуд налили 500 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} \cdot 4^{-4,9}$.

Ответ: _____.

10

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 10$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

Ответ: _____.

11

От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 ч после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = (x - 5)^2 \cdot e^{x-7}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $2 \cos 2x + 4 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

- 15 Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leq 0$.

- 16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

- а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
- б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
- в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

ВАРИАНТ 8

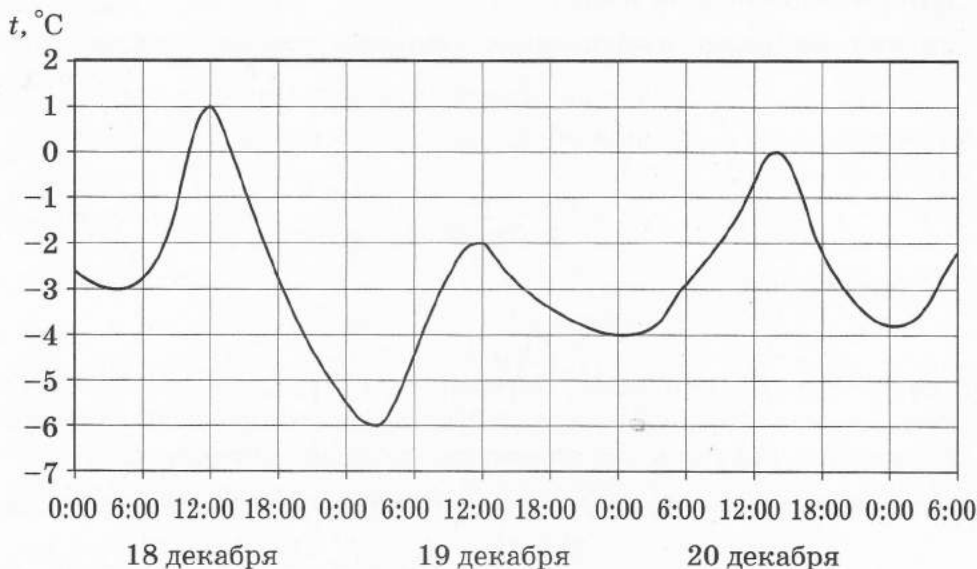
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Тетрадь стоит 13 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке больше 30 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Ответ: _____.

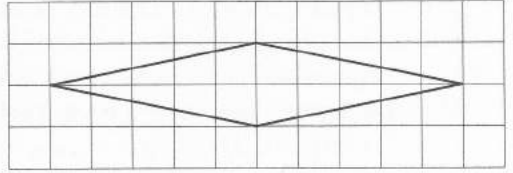
- 2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

Из множества натуральных чисел от 28 до 47 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Ответ: _____.

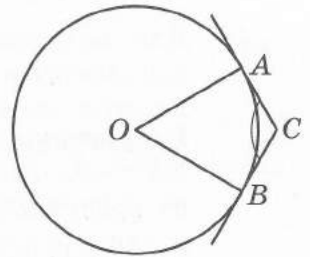
5

Найдите корень уравнения $\log_7(9-x) = 3\log_7 3$.

Ответ: _____.

6

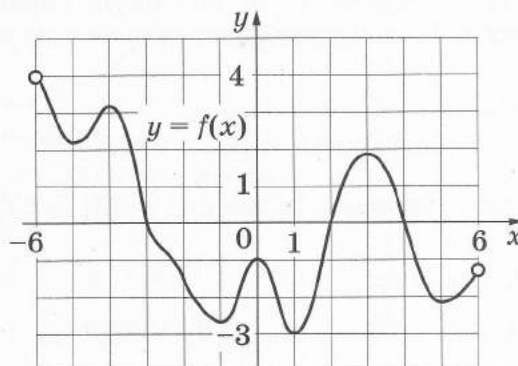
Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Меньшая дуга AB равна 64° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

7

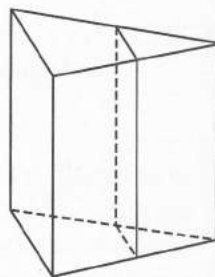
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-3, 5; 4, 5]$.



Ответ: _____.

8

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 79. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[9]{11} \cdot 11 \cdot \sqrt[18]{11}}{\sqrt[6]{11}}$.

Ответ: _____.

10

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 25 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 90 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$.

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

11

Расстояние между городами А и В равно 300 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^4 - 4x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

15 Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leq 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB=5$, а $BC=5\sqrt{2}$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений

неравенства $\frac{a - (a^2 - 2a) \cos 2x + 2}{3 - \cos 4x + a^2} < 1$ содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

19

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

- а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
- б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
- в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

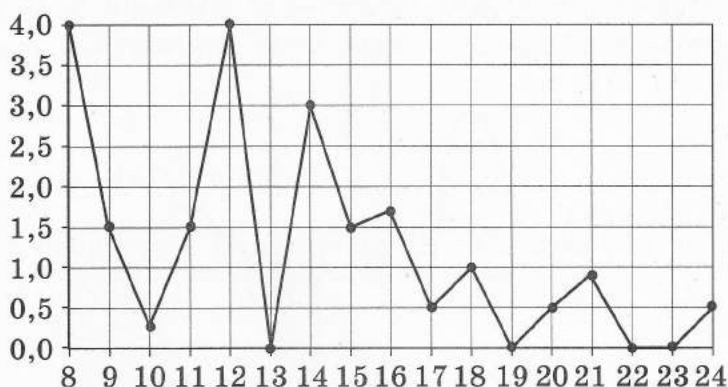
1

Для приготовления абрикосового варенья на 1 кг абрикосов нужно 1,2 кг сахара. Какое наименьшее количество килограммовых упаковок сахара нужно, чтобы сварить варенье из 14 кг абрикосов?

Ответ: _____.

2

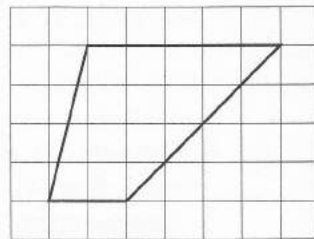
На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в Томске впервые выпало ровно 0,5 миллиметра осадков.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: _____.

4

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} = 3^x$.

Ответ: _____.

6

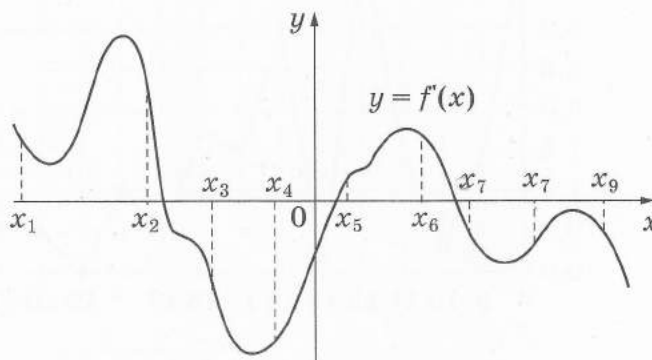
Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 12. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: _____.



7

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

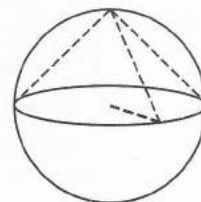


Ответ: _____.

8

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\log_{11} 24,2 + \log_{11} 5$.

Ответ: _____.

10

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2,5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,25$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм.) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в $19\,950 \text{ Дж}$.

Ответ: _____.

11

Имеется два сплава. Первый содержит 25% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 28% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = 27x + 25\cos x - 14$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
- 14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{11}$ и $BC = 2\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 6$, $SD = \sqrt{37}$.
- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .
- 15 Решите неравенство $(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.
- 16 Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .
- а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 3$ и $MK = 12$.
- 17 В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 11 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

19

- а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
- б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
- в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

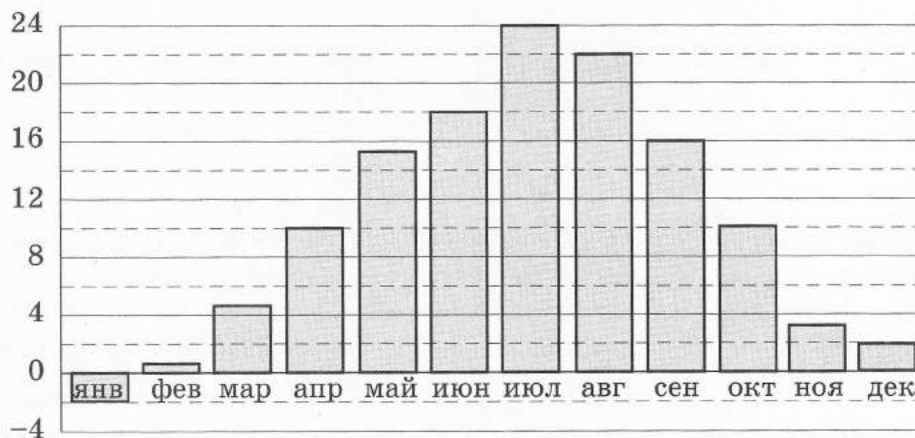
1

В доме, в котором живёт Игорь, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Игорь живёт в квартире 47. На каком этаже живёт Игорь?

Ответ: _____.

2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру. Ответ дайте в градусах Цельсия.

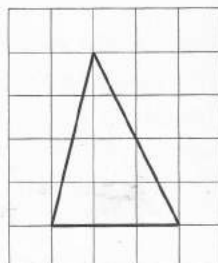


Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: _____.



4

Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Галя.

Ответ: _____.

5

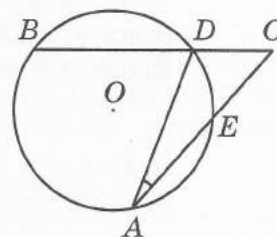
Найдите корень уравнения $(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2$.

Ответ: _____.

6

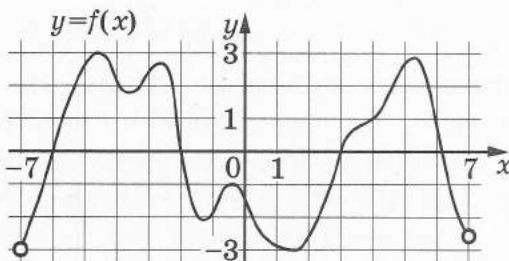
Угол ACB равен 54° . Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E , равна 138° . Найдите угол DAE . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

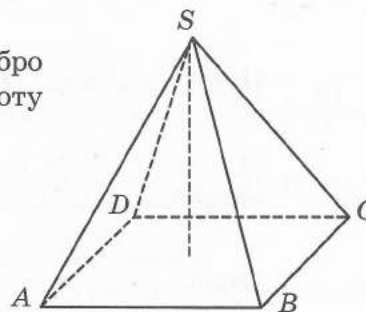


Ответ: _____.

8

В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 7,5, а сторона основания равна 10. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\sqrt{108} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{27}$.

Ответ: _____.

10

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3 \text{ кг/с}$. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 57^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где

$c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена,

$\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: _____.

11

Расстояние между городами А и В равно 630 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = 20 \operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

15

Решите неравенство $\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5$.

16

Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19

На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

- а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
- б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
- в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

ВАРИАНТ 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

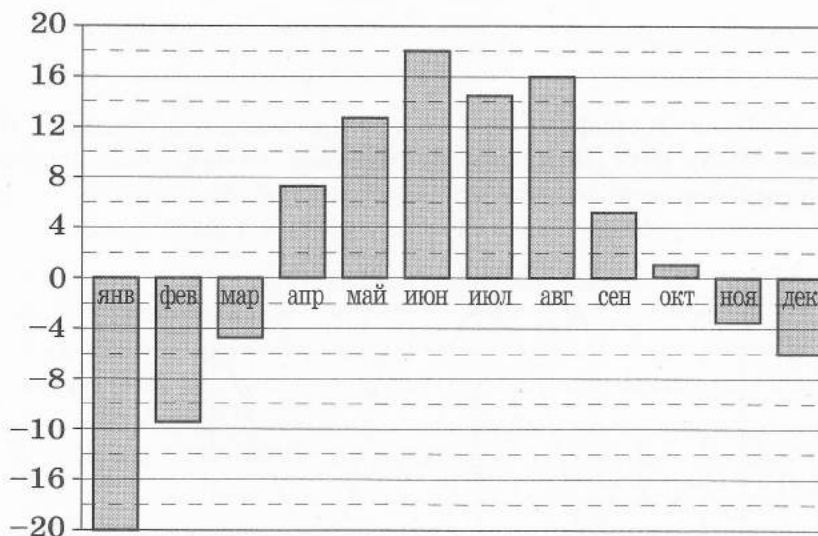
1

В городе N живёт 150 000 жителей. Среди них 15 % детей и подростков. Среди взрослых 45 % не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

Ответ: _____.

2

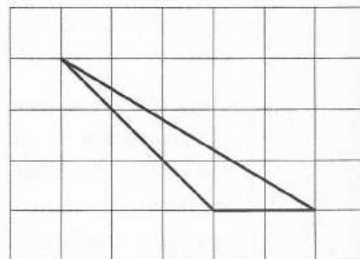
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура не превышала 6 градусов Цельсия.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

4

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 45 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Испании и 9 прыгунов из США. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из США.

Ответ: _____.

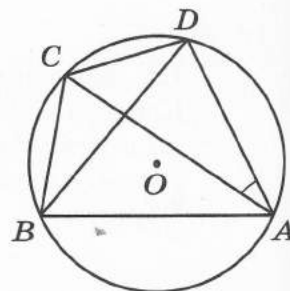
5

Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-1} = 5$.

Ответ: _____.

6

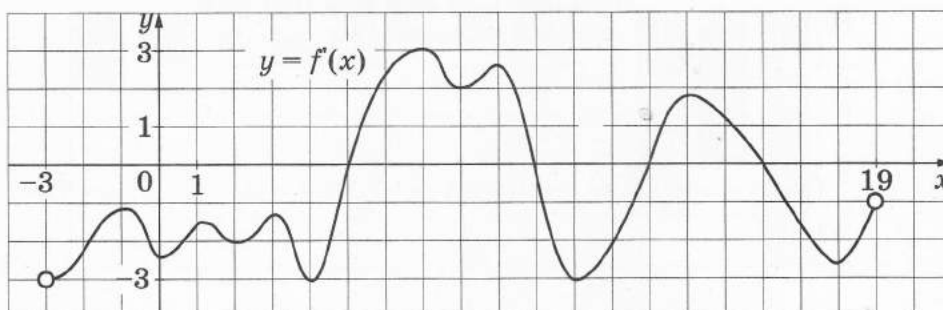
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82° , угол ABD равен 47° . Найдите угол CAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

7

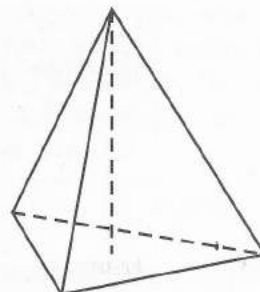
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Ответ: _____.

8

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 10,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $7\sqrt{2} \sin \frac{15\pi}{8} \cdot \cos \frac{15\pi}{8}$.

Ответ: _____.

10

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях соответственно, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях соответственно. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ: _____.

11

Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$ на отрезке $[9; 36]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C .
- б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- 15 Решите неравенство $\frac{3}{(2^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0$.
- 16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.
- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.
- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.
- 18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

- а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
- б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
- в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

ВАРИАНТ 12

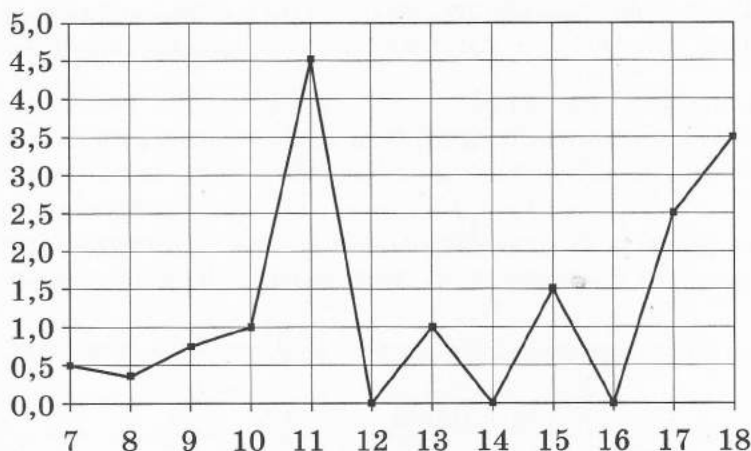
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Для покраски потолка требуется 270 г краски на 1 м². Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 37 м²?

Ответ: _____.

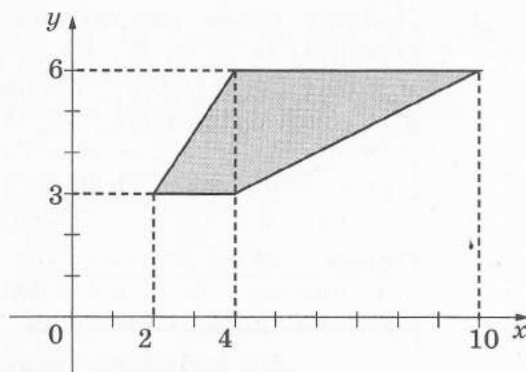
- 2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за данный период не выпадало осадков.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

4

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 9 участников из России, в том числе Тимофей Трубников. Найдите вероятность того, что в первом туре Тимофей Трубников будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

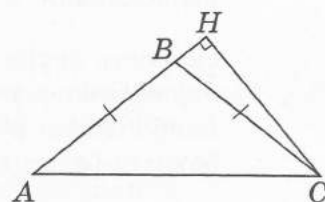
5

Найдите корень уравнения $2^{1-3x} = 128$.

Ответ: _____.

6

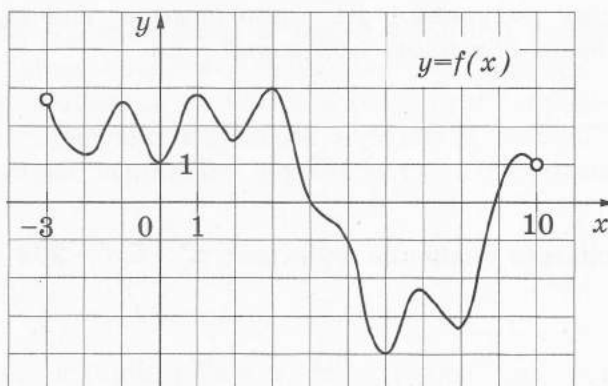
В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 16$, высота CH равна 4. Найдите синус угла ACB .



Ответ: _____.

7

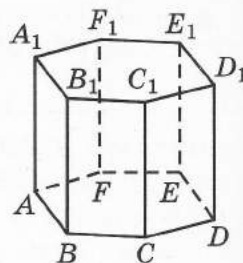
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

8

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, E, F, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 12.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\log_8 144 - \log_8 2,25$.

Ответ: _____.

10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с —

скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

11

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 54 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-3; 1]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

15

Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$.

16

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

17

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{7}{x} - 4 \right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

19

Каждый из группы учащихся ходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог ходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

ВАРИАНТ 13

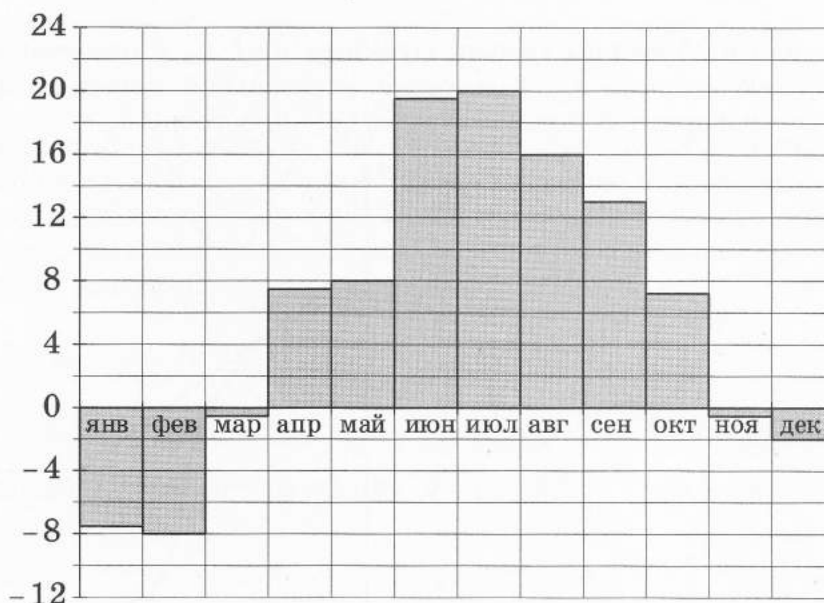
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Рост Джимми 4 фута 7 дюймов. Выразите рост Джимми в сантиметрах, если в 1 футе 12 дюймов, а в 1 дюйме 2,54 сантиметра. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ: _____.

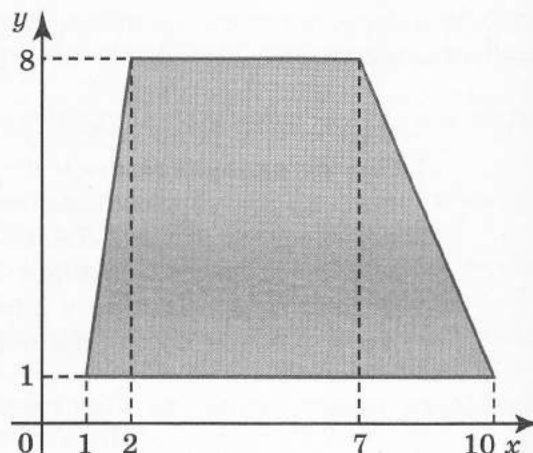
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, в каком месяце второго полугодия средняя температура впервые стала ниже 10 °С. В ответ напишите номер месяца.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 1)$, $(10; 1)$, $(7; 8)$, $(2; 8)$.



Ответ: _____.

4

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $2^{2-3x} = 32$.

Ответ: _____.

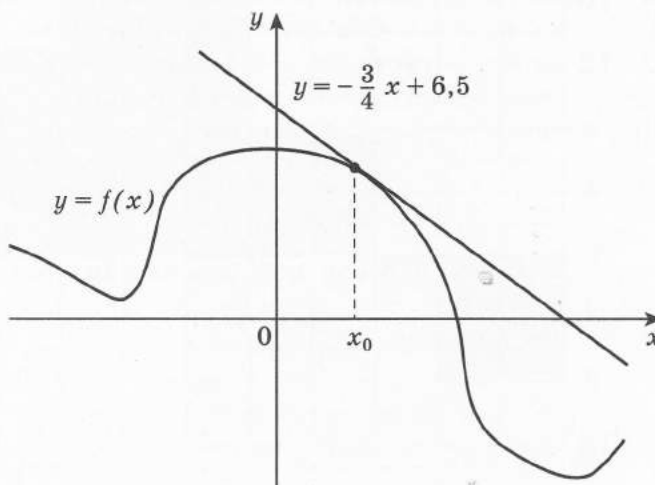
6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,41$. Найдите $\sin B$.

Ответ: _____.

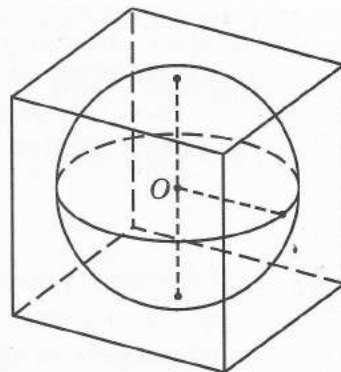
7

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) - 3$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Шар, объём которого равен 36л, вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{5,6} \cdot \sqrt{3,5}}{\sqrt{0,4}}$.

Ответ: _____.

- 10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 10 м?

Ответ: _____.

- 11 Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 68 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 6 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 15 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 60 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 22)e^{x-21}$ на отрезке $[20; 22]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

15

Решите неравенство $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{-x} \leq 16$.

16

Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

17

15 января планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 11-й месяц кредитования нужно выплатить 44,4 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = \frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

19

- а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.
- б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?
- в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

ВАРИАНТ 14

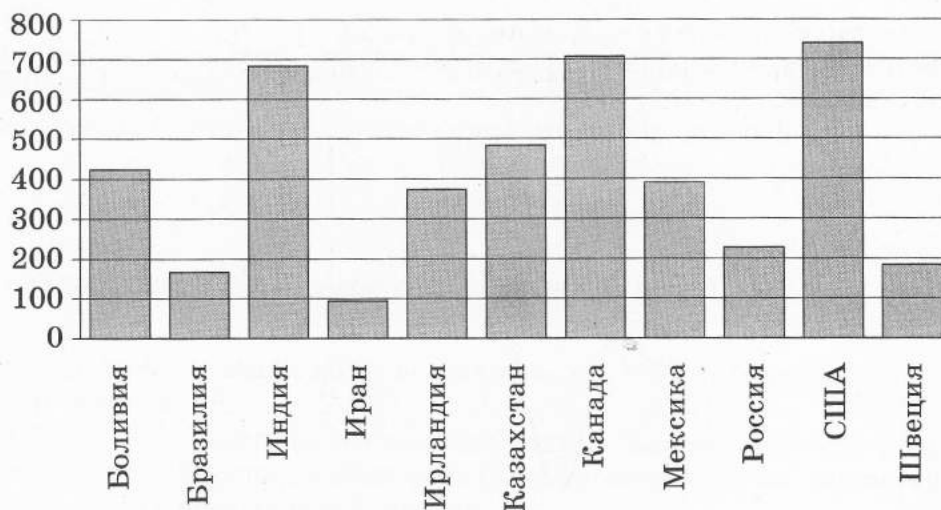
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 18% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

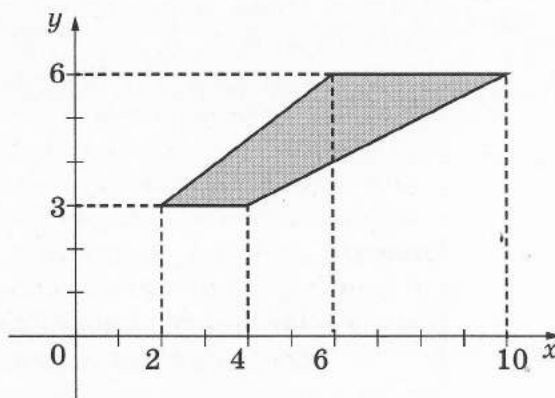
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. По горизонтали указываются страны, по вертикали — количество цинка в тысячах тонн. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Россия?



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

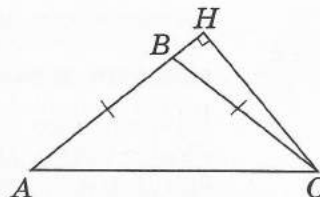
- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,95. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,6. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 17.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $5^{1-x} = 125$.

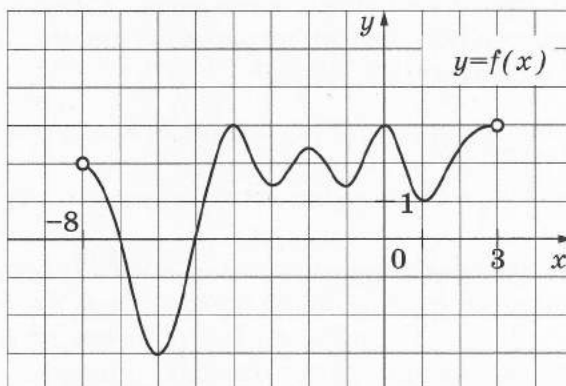
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, высота CH равна 6. Найдите синус угла ACB .



Ответ: _____.

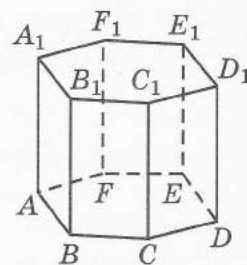
- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

8

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 5.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\log_4 40 - \log_4 2,5$.

Ответ: _____.

10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 499 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 3 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

11

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 58 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 400}{x}$ на отрезке $[-28; -2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

15

Решите неравенство $\frac{567 - 9^{-x}}{81 - 3^{-x}} \geq 7$.

16

Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MK = NL$.

б) Найдите MN , если известно, что $BC = 3$, $AD = 8$ и $MK : KL = 1 : 3$.

17

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 466,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков

было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{7}{19}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

ВАРИАНТ 15

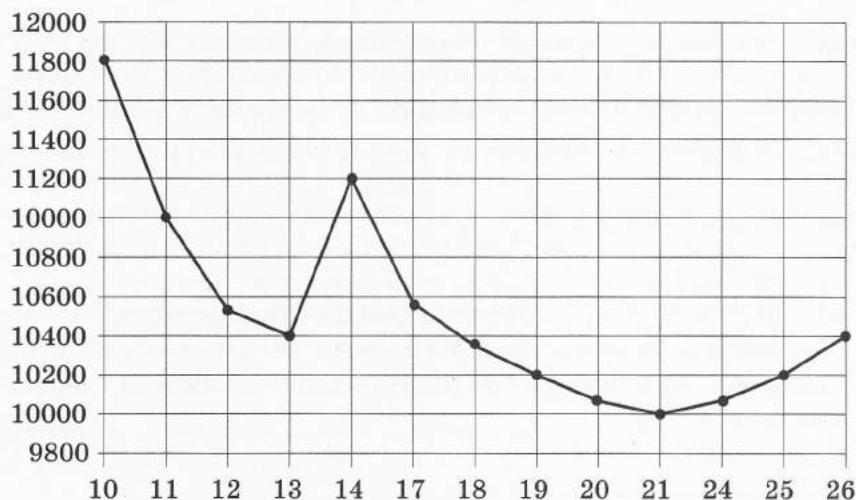
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Поезд Саратов — Москва отправляется в 18:40, а прибывает в 10:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

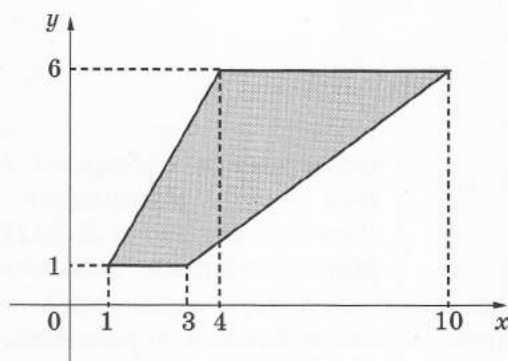
Ответ: _____.

- 2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

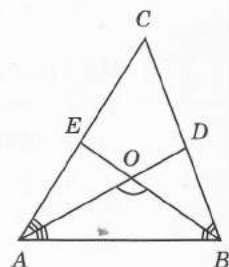
- 4 В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-6} = \frac{1}{36}$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 36° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 15$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 7$ с.

Ответ: _____.

- 8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 63 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

- 10 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 140 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 400 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ: _____.

- 11 На изготовление 252 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 420 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 10)^2(x + 1) + 3$ на отрезке $[5; 14]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)} - 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1 .

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1 .
б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

15 Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2)$.

16 Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

17 В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19 Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

- а) Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 15.
б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?
в) Найдите 37-е по величине число-палиндром, которое делится на 15.

ВАРИАНТ 16

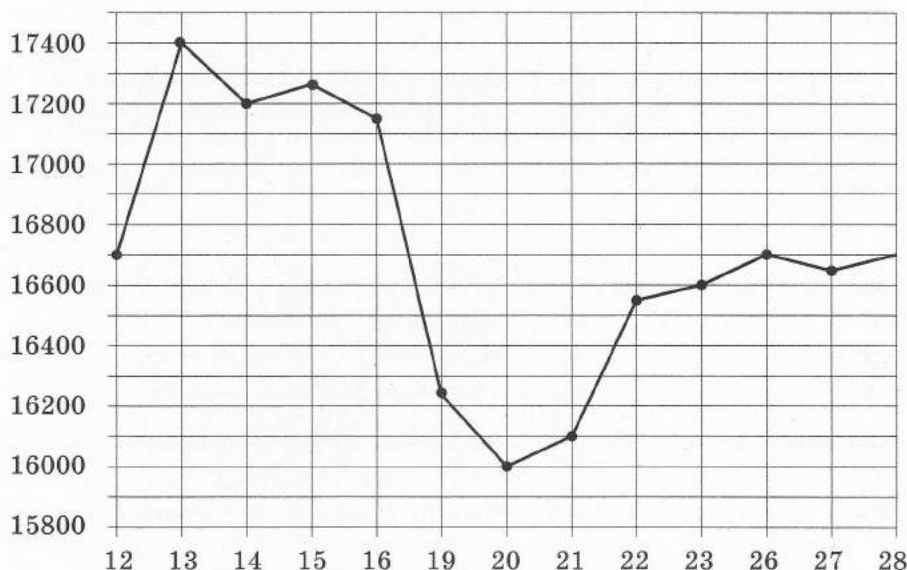
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 7%. Книга стоит 300 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

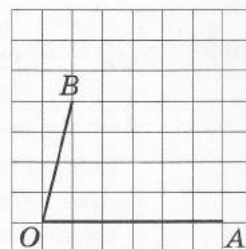
Ответ: _____.

- 2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.

- 3 Найдите тангенс угла AOB .



Ответ: _____.

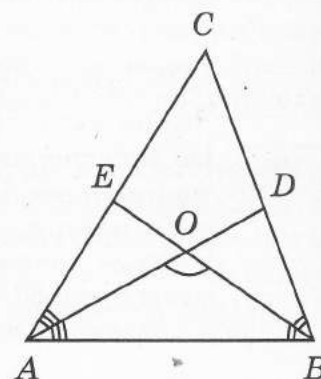
- 4 В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Михаил окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

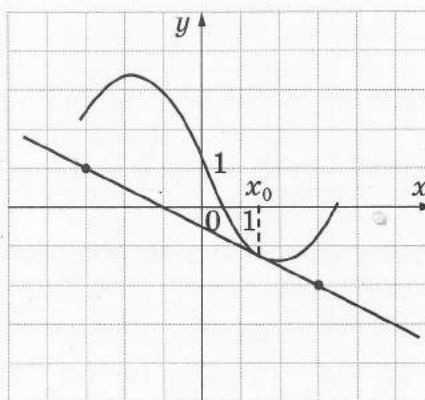
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 52° , биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите угол AOB .
Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

8

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $46\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: _____.

10

Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 520 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ: _____.

11

На изготовление 522 деталей первый рабочий затрачивает на 11 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 609 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 8 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 7$ на отрезке $[-1; 1]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)} - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 3, боковые рёбра равны 1, точка D — середина ребра CC_1 .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

15

Решите неравенство $-2\log_{\frac{x}{3}} 27 \geq \log_3 27x + 1$.

16

На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{5}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

17

У фермерского хозяйства есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га.

Фермерское хозяйство может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермерское хозяйство?

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 1| + 2x - x^2 = |y^2 - 1| + 2y - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19

Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 80 см, но не больше 85 см (назовём такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 16 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

ВАРИАНТ 17

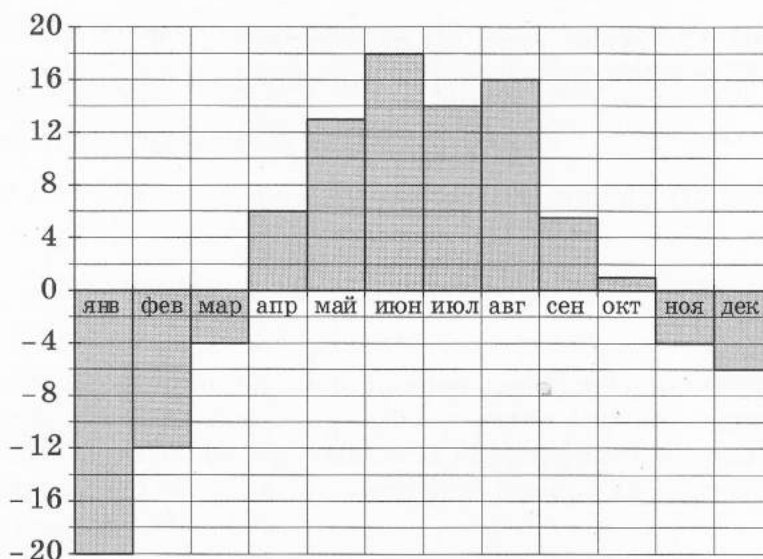
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 На счету Ленинского мобильного телефона было 54 рубля, а после разговора с Серёжей осталось 28 рублей. Сколько минут длился разговор с Серёжей, если одна минута разговора стоит 2 рубля.

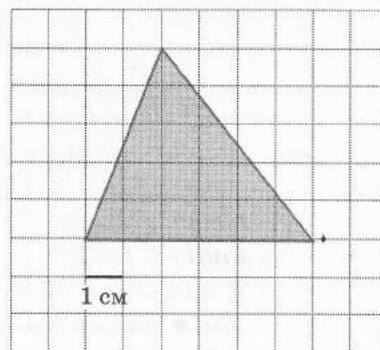
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Свердловске (ныне — Екатеринбург) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 1973 году средняя температура была ниже, чем 6°C .



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 4 При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,01 мм, равна 0,975. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 68,99 мм, или больше, чем 69,01 мм.

Ответ: _____.

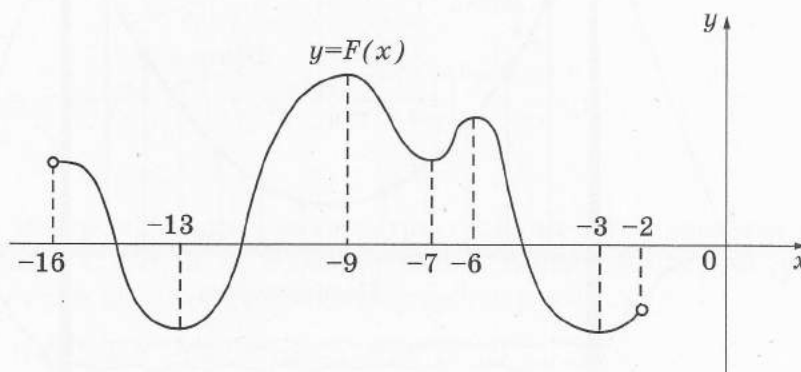
- 5 Найдите корень уравнения $3^{3+4x} = 0,36 \cdot 5^{3+4x}$

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите высоту CH .

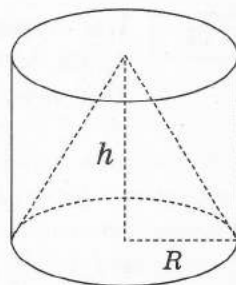
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-10; -4]$.



Ответ: _____.

- 8 Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 20.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

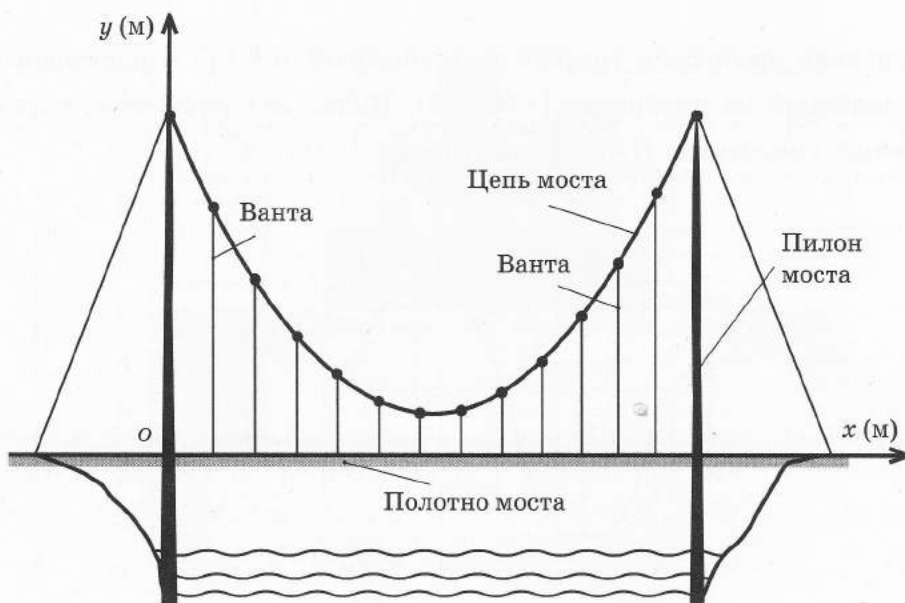
Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}$.

Ответ: _____.

- 10 Самые красивые мосты — вантовые. Вертикальные **пилоны** связаны огромной провисающей **цепью**. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают **полотно моста**, называются **вантами**.

На рисунке изображена схема одного вантового моста. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат цепь моста имеет уравнение $y = 0,0061x^2 - 0,854x + 33$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 100 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

11

Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 45 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = 19 + 4x - \frac{x^3}{3}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и D_1 .

б) Найдите угол между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

15

Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

16

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника $AB_1 C_1$.

а) Докажите, что $C_1 Q$ — биссектриса угла $AC_1 B_1$.

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник $AC_1 B_1$, если известно, что $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$.

17 31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй — 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

19 В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

- Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
- Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?
- При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

ВАРИАНТ 18

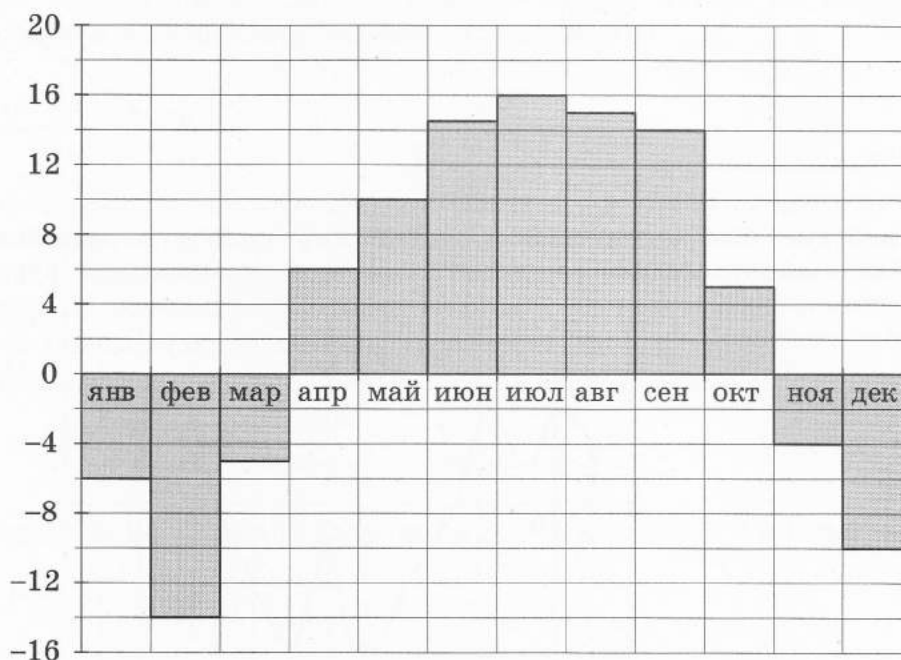
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Диагональ экрана телевизора равна 32 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 сантиметра. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ: _____.

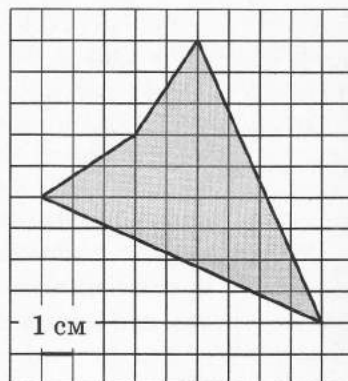
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 1994 году средняя температура была ниже, чем 8 °С.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4

В фирме такси в данный момент свободно 16 машин: 4 чёрных, 3 синих и 9 белых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет чёрное такси.

Ответ: _____.

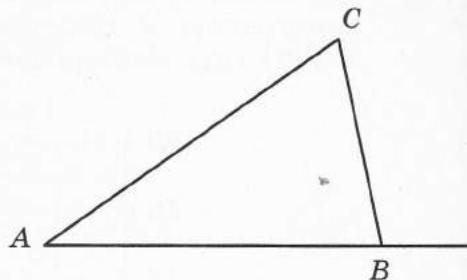
5

Найдите корень уравнения $\log_4(2 - x) = \log_{16} 25$.

Ответ: _____.

6

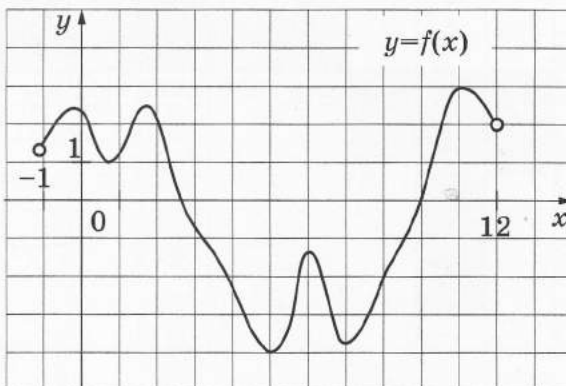
В треугольнике ABC угол A равен 41° , угол C равен 91° . Найдите внешний угол при вершине B .



Ответ: _____.

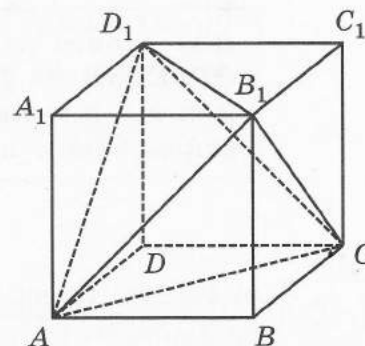
7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- 8 Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,8.
Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{42}{2^{\log_2 3}}$.

Ответ: _____.

- 10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 16 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 28 км?

Ответ: _____.

- 11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 51 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 357 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 351 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 30 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x - 16x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{4}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} - \frac{11}{\cos x} + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 9. На ребре SA отмечена точка M так, что $AM = 6$.

а) Постройте перпендикуляр из точки S на плоскость BCM .

б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .

15

Решите неравенство $15^x - 9 \cdot 5^x - 3^x + 9 \leq 0$.

16

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 7$, $AB = 15$, $AC = 20$.

17

15 января планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 13% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

- 19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8750.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 19

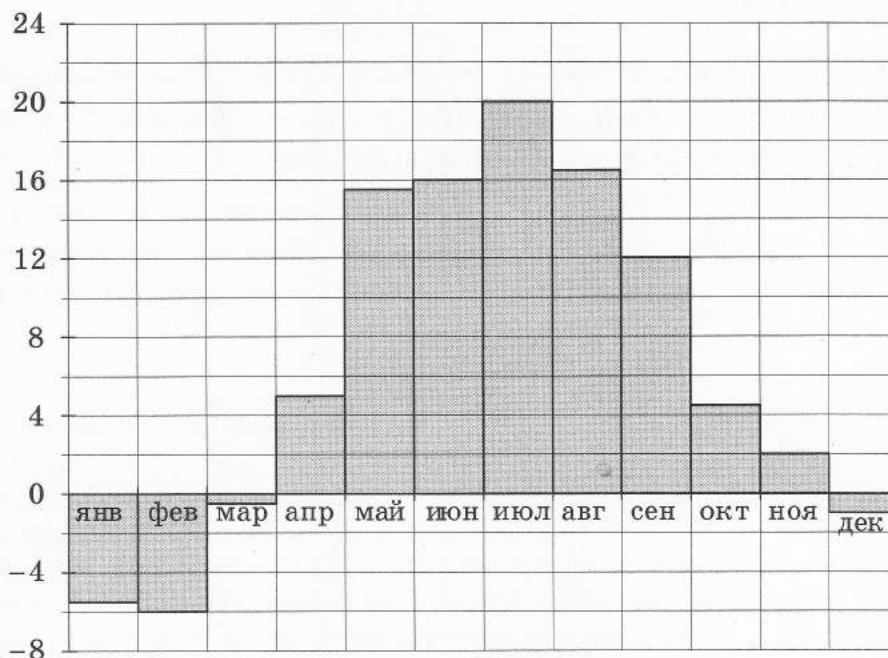
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 46 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 755 рублей, а разовая поездка — 21 рубль?

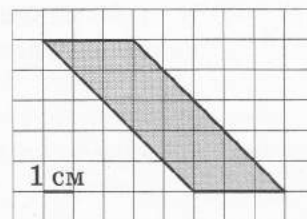
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев в 2003 году средняя температура была отрицательной.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 4 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна $0,3$, а при каждом последующем — $0,9$. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее $0,96$?

Ответ: _____.

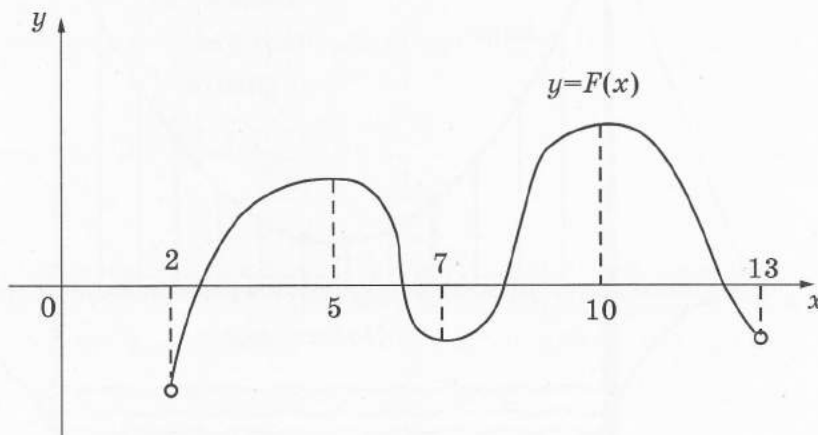
- 5 Найдите корень уравнения $2^{2x-14} = \frac{1}{16}$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 5$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

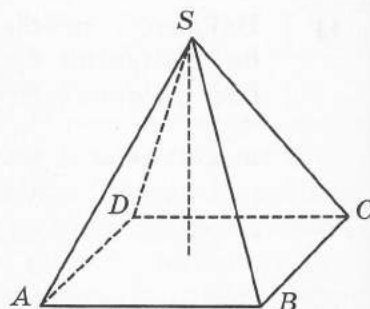
- 7 На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 13)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[3; 9]$.



Ответ: _____.

8

В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите её объём.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

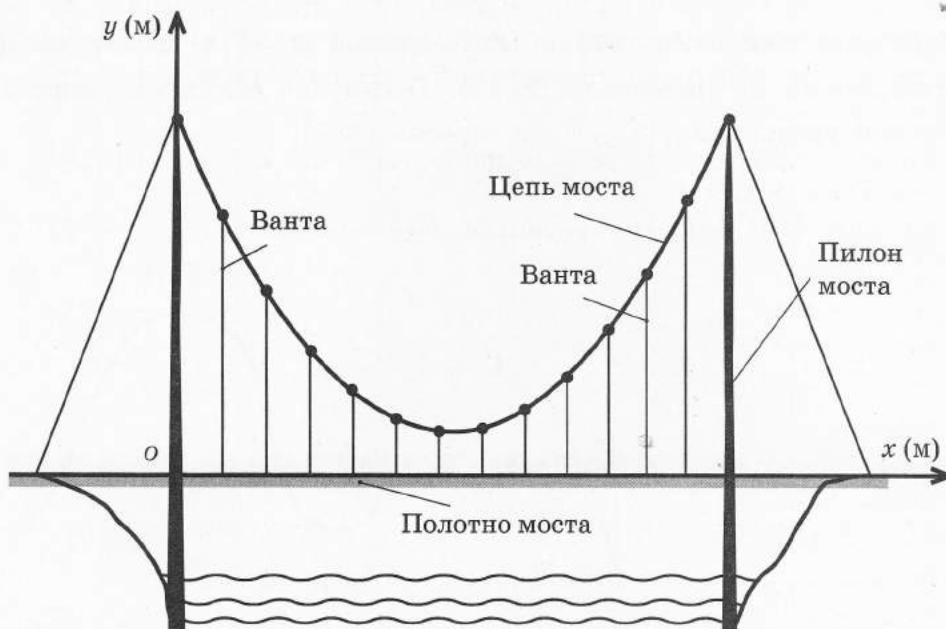
Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[40]{5} \cdot \sqrt[24]{5}}{\sqrt[15]{5}}$.

Ответ: _____.

10

Самые красивые мосты — вантовые. Вертикальные **пилоны** связаны огромной провисающей **цепью**. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают **полотно моста**, называются **вантами**.

На рисунке изображена схема одного вантового моста. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат цепь моста имеет уравнение $y = 0,0056x^2 - 0,672x + 24$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 100 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

11

Автомобиль выехал с постоянной скоростью 67 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 201 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 210 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 17$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{3}{\cos^2\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)} + \frac{4}{\sin x} - 4 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

15

Решите неравенство $\log_{0,25x^2}\left(\frac{x+12}{4}\right) \leq 1$.

16

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 9$, $AB = 10$, $AC = 17$.

17

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{5a + 150x - 10ax}{100x^2 + 20ax + a^2 + 25}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

19

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ВАРИАНТ 20

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

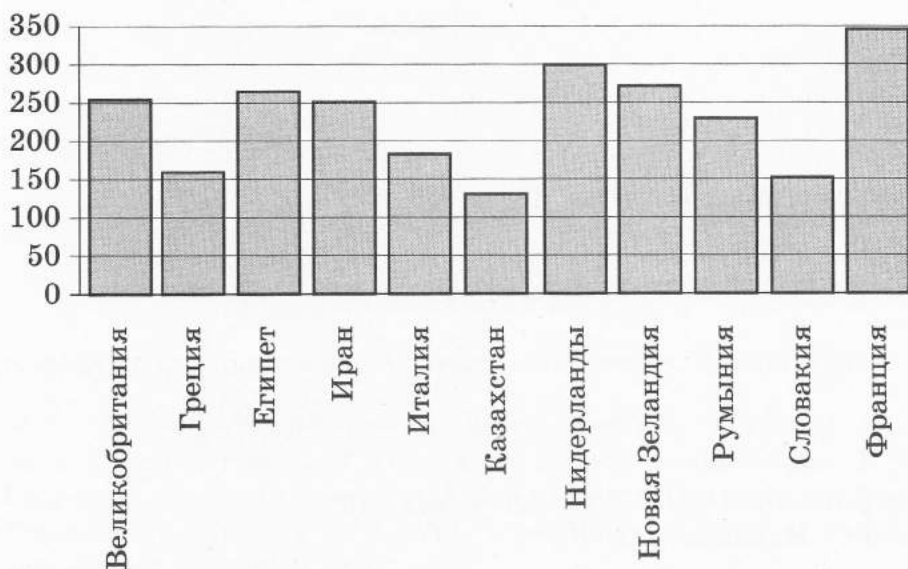
1

В летнем лагере 197 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 52 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: _____.

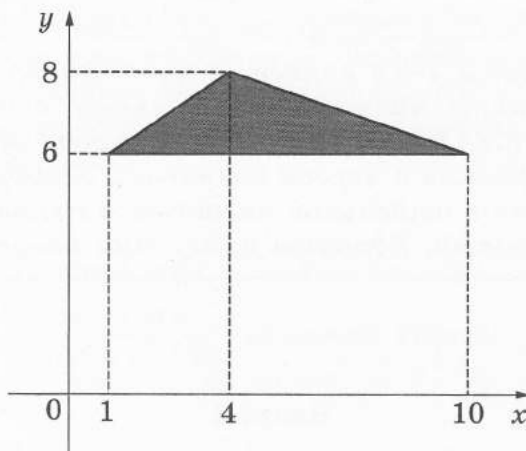
2

На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место занимала Италия?



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(10;6)$, $(4;8)$.



Ответ: _____.

- 4 В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зелёное такси.

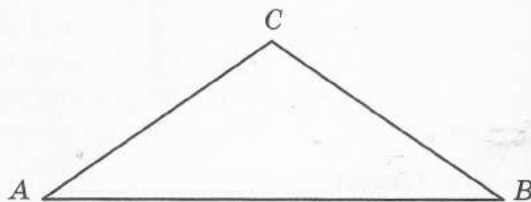
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $8^{3-4x} = 1,6 \cdot 5^{3-4x}$

Ответ: _____.

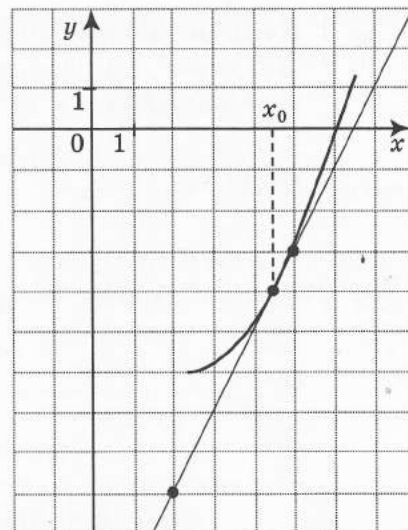
- 6 В треугольнике ABC угол A равен 30° , $AC = BC$. Найдите угол C .

Ответ: _____.



7

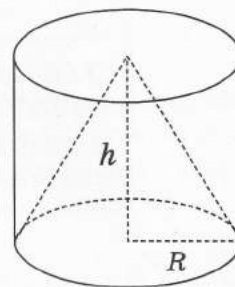
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

8

Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 12.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{70}{4^{\log_4 5}}$.

Ответ: _____.

10

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин.) — прошедшее от начального момента время, T (мин.) — период полураспада. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 4$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 2$ мин. Через какое время после начала распада масса изотопа станет меньше 1 мг?

Ответ: _____.

- 11 Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 26 км/ч. Обратнo он летел на самолёте со скоростью 312 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 24x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[63; 65]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

- 14 Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 8 друг от друга, пересекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 9π .

а) Постройте эти сечения.

б) Найдите площадь поверхности шара.

- 15 Решите неравенство $\frac{x^3 - 13x^2 + 44x - 30}{x^2 - 11x + 30} \geq x - 1$.

- 16 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 10$, $AB = 17$, $AC = 21$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 14 раз больше, либо в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7424.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 21

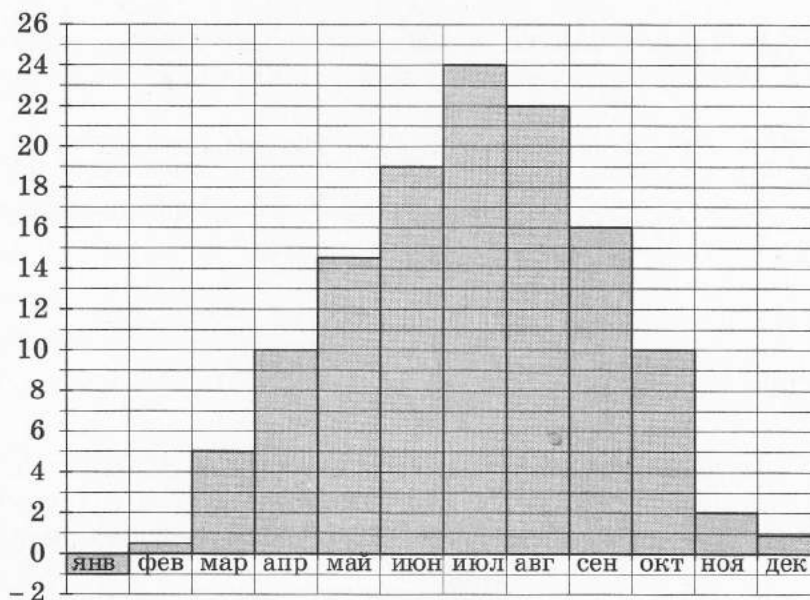
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1600 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1100 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

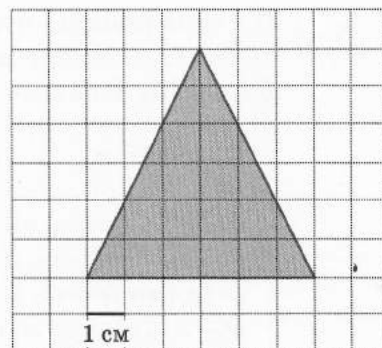
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, на сколько градусов в среднем сентябрь теплее апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

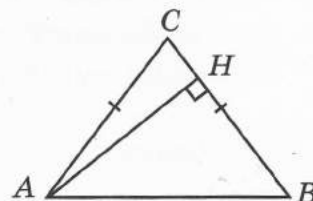
- 4 На фабрике керамической посуды 20 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота $AH = 8$. Найдите $\cos A$.



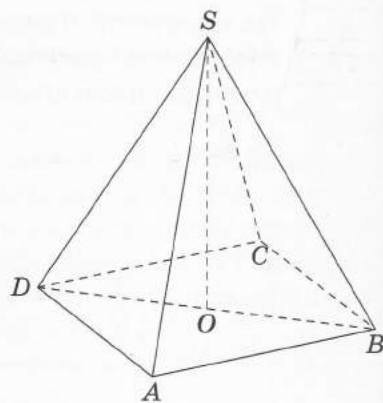
Ответ: _____.

- 7 Прямая $y = -6x + 7$ является касательной к графику функции $y = ax^2 - 2x + 8$. Найдите a .

Ответ: _____.

8

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $BD = 18$. Найдите боковое ребро SA .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $(\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75})\sqrt{3}$.

Ответ: _____.

10

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не ниже $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Ответ: _____.

11

Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 70 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 41 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x - 17x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.
- 14 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .
б) Найдите угол между плоскостью $A_1 BD$ и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .
- 15 Решите неравенство $\log_{|x|}(15x - 18 - 2x^2) \leq 2$.
- 16 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника $AB_1 C_1$.
а) Докажите, что $C_1 Q$ — биссектриса угла $AC_1 B_1$.
б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник $AB_1 C_1$, если известно, что $BC = 11$, $AB = 13$, $AC = 20$.

- 17 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

- 19 Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 333 нуля. На сколько нулей может оканчиваться число N ?

ВАРИАНТ 22

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

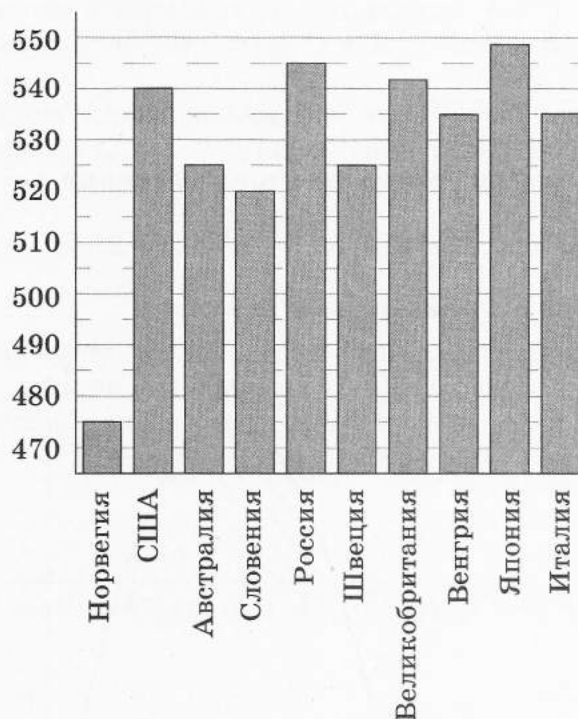
1

Магазин делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от цены покупки. Упаковка сосисок стоит в магазине 100 рублей. Пенсионер заплатил за упаковку сосисок 92 рубля. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

Ответ: _____.

2

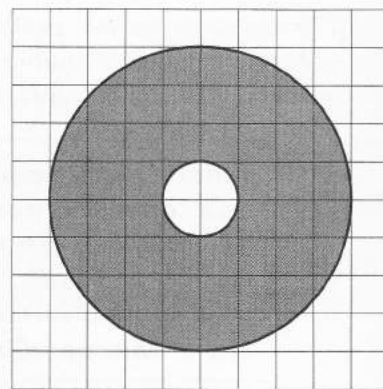
На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников не меньше чем 525.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 46. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

4

Максим с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 11 — синие, 7 — зелёные, остальные — оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в оранжевой кабине.

Ответ: _____.

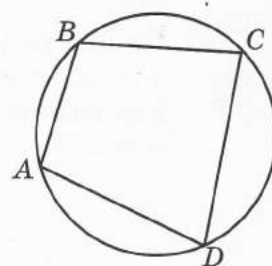
5

Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=8$.

Ответ: _____.

6

Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 98° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

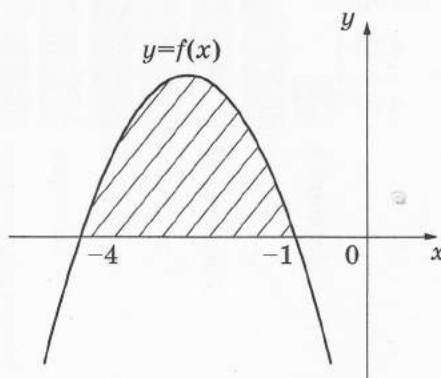


Ответ: _____.

7

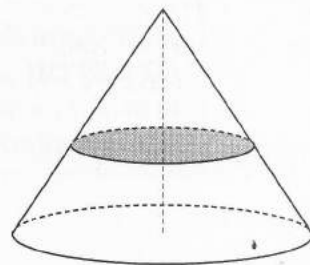
На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4x + 2$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

- 8 Объём конуса равен 32. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения: $2^4 \cdot 7^3 : 14^2$.

Ответ: _____.

- 10 Рейтинговое агентство вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{\frac{0,02K}{(K+1)r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,38, а оценка экспертов равна 0,13.

Ответ: _____.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$ на отрезке $[-2; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

Вокруг куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M образует угол 15° с плоскостью ABC .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

15

Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}} - 4 \cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geq 0$.

16

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

17

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 8420 000 рублей в кредит под 10,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \leq 16$$

выполняется для всех значений $x \in [-2; 1]$.

19

- а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.
- б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?
- в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

ВАРИАНТ 23

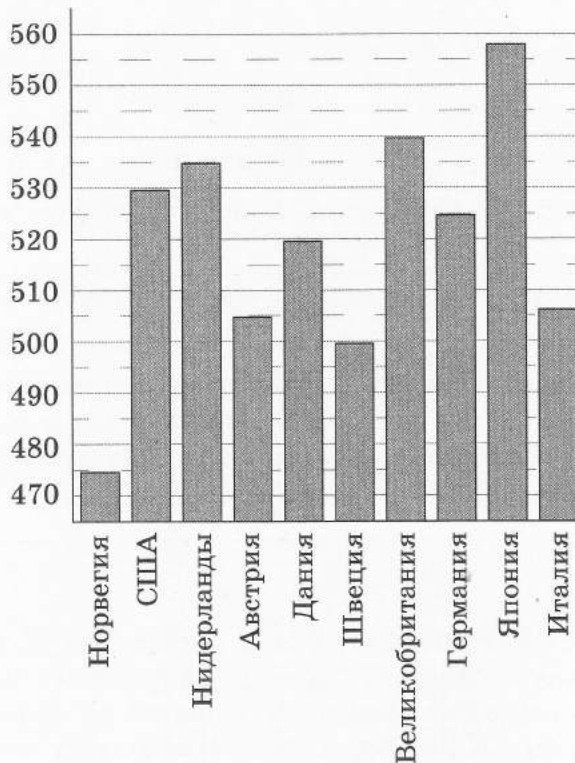
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Бегун пробежал 100 метров за 10 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

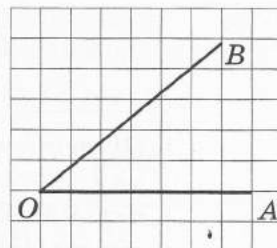
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл ниже, чем в Нидерландах.



Ответ: _____.

3 Найдите тангенс угла AOB .



Ответ: _____.

4 Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: _____.

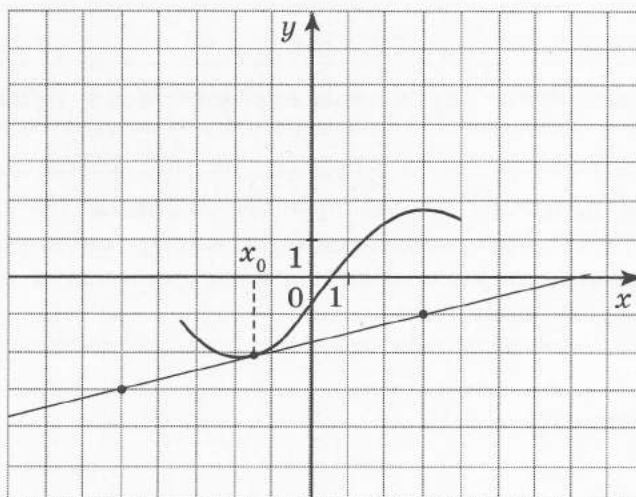
5 Решите уравнение $2^{3+x} = 4^{2x}$.

Ответ: _____.

6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 72$, $\cos A = \frac{12}{13}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $57\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $(\sqrt{3} - \sqrt{18})(\sqrt{3} + \sqrt{18})$.

Ответ: _____.

- 10 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

- 11 Коля и Митя выполняют одинаковый тест. Коля отвечает за час на 12 вопросов теста, а Митя — на 21. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Коля закончил свой тест позже Мити на 105 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 9\tg x - 9x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $7\tg^2 x - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

15 Решите неравенство $\log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \leq 0$.

16 В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 6$.

17 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Михаил переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{5 - 4x - x^2} = 3a + 3$$

имеет единственный корень.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 5292.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 24

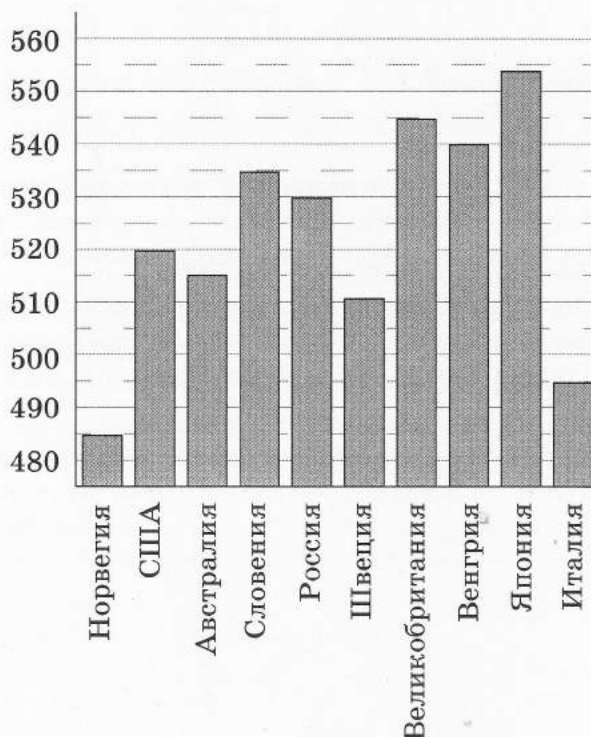
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по 12 квартир. Женя живёт в квартире № 34. На каком этаже живёт Женя?

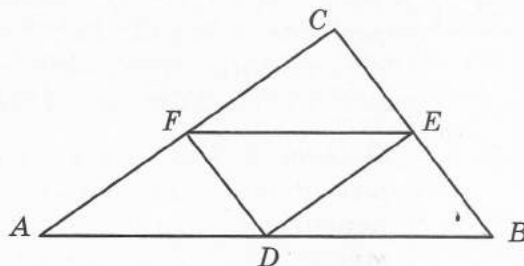
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Венгрии. Определите, какое место занимает Россия.



Ответ: _____.

- 3 Периметр треугольника ABC равен 8. Найдите периметр треугольника FDE , вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC .



Ответ: _____.

- 4 В классе 33 учащихся, среди них два друга — Андрей и Михаил. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_4 2^{2x+5} = 4$.

Ответ: _____.

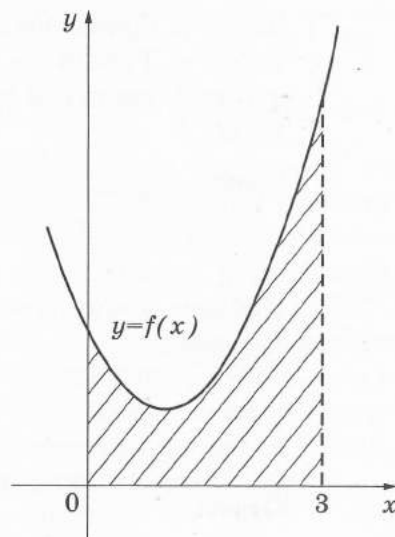
- 6 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, $\cos A = \frac{5}{13}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3.$$

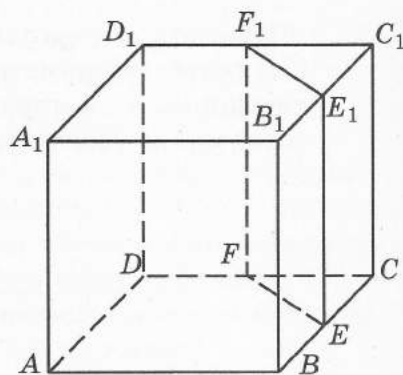
Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

8

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 15. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.

Ответ: _____.

10

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -12,5$ К/мин², $b = 175$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

11

Костя и Гриша выполняют одинаковый тест. Костя отвечает за час на 12 вопросов теста, а Гриша — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Костя закончил свой тест позже Гриши на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 100}{x}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

15

Решите неравенство $\frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 12}{x^2 - 7x + 12} \geq x + 1$.

16

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M , N , P .

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 10$.

17

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственный корень.

- 19 Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в два раза больше истинного. Найдите все такие наборы из трёх чисел (двузначное, трёхзначное и пятизначное).

ВАРИАНТ 25

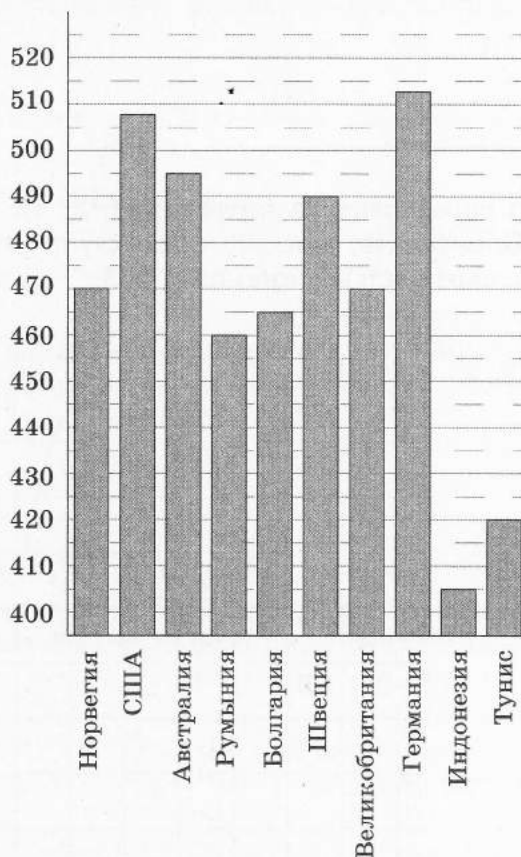
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 6 человек следует взять $\frac{1}{5}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 9 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Ответ: _____.

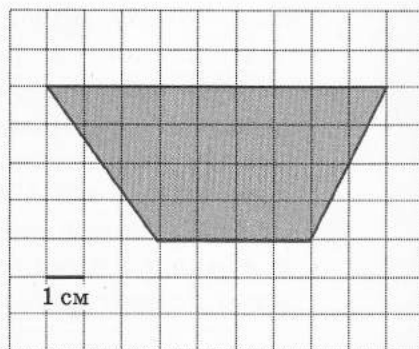
- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите страну, в которой наименьший средний балл среди всех представленных стран Европы. В ответе напишите средний балл в этой стране.



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рисунок). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4

Игорь с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 40 кабинок, из них 21 — серые, 13 — зелёные, остальные — красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Игорь прокатится в красной кабине.

Ответ: _____.

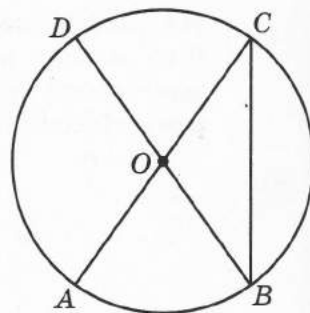
5

Найдите корень уравнения $(x - 4)^5 = -243$.

Ответ: _____.

6

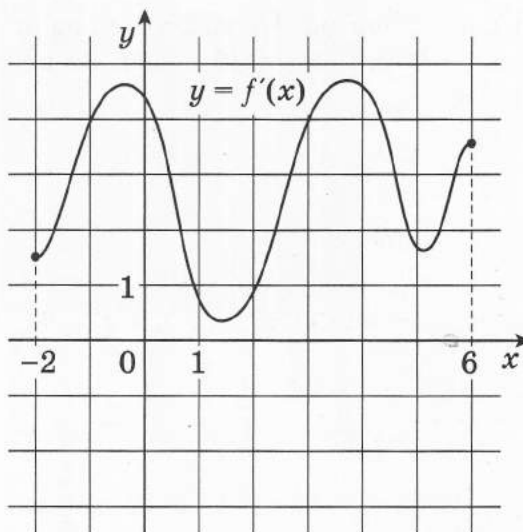
AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 21° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

7

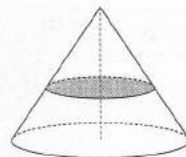
Функция $y = f(x)$ определена на интервале $[-2; 6]$. На рисунке изображён график её производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны прямой $y = 3x + 4$ или совпадают с ней.



Ответ: _____.

8

Объём конуса равен 152. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $(\sqrt{3} - \sqrt{8})(\sqrt{3} + \sqrt{8})$.

Ответ: _____.

10

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

11

Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь — за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на отрезке $[0; 13]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{9}{\operatorname{tg} x} + 8 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF .

б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF .

15

Решите неравенство $2\log_{(x^2-4x+5)^2}(4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5}(3x^2+4x+1)$.

16

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 31 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

17

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 0,3 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года кредитования?

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$3x^5 + 11x + 4|x - a + 3| + 2|3x + a - 5| + \sqrt[3]{4x + 5} \leq 25$$

выполняется для всех значений $x \in [-4; -1]$.

19 Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на четырёхзначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в семь раз больше истинного. Найдите все такие наборы из трёх чисел (двузначное, трёхзначное и четырёхзначное).

ВАРИАНТ 26

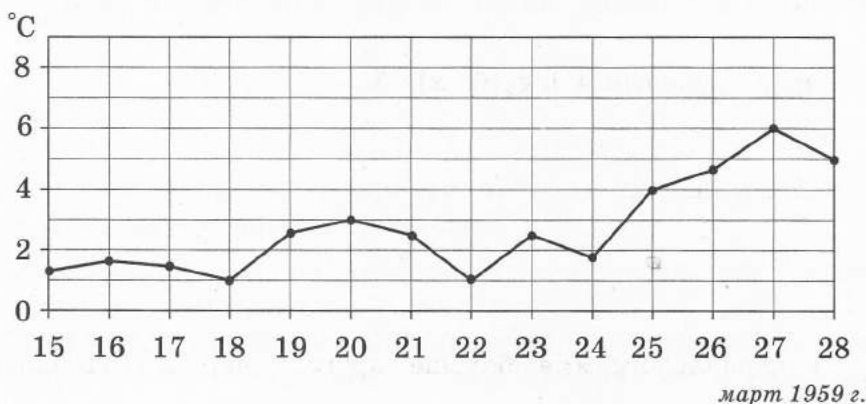
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 По тарифному плану «Просто как день» со счёта абонента компания сотовой связи каждый день снимает 22 руб. Если на счёту осталось не больше 22 руб., то на следующий день номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня Лиза положила на свой счёт 500 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

Ответ: _____.

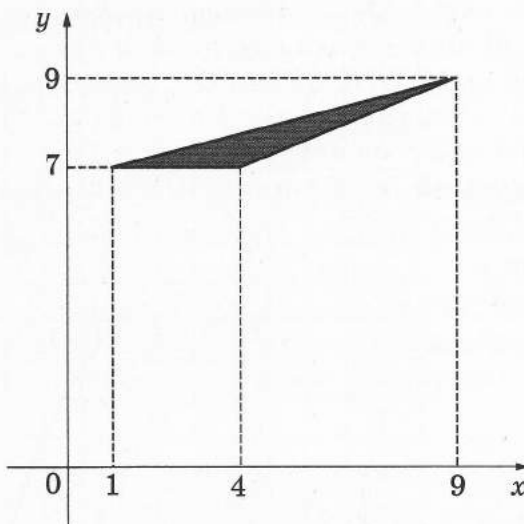
- 2 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Пскове каждый день с 15 по 28 марта 1959 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какого числа среднесуточная температура была наибольшей за указанный период.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;7)$, $(4;7)$, $(9;9)$.



Ответ: _____.

4

Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30 % этих стёкол, вторая — 70 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стёкол, а вторая — 4 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $\log_2(6-x) = 5$.

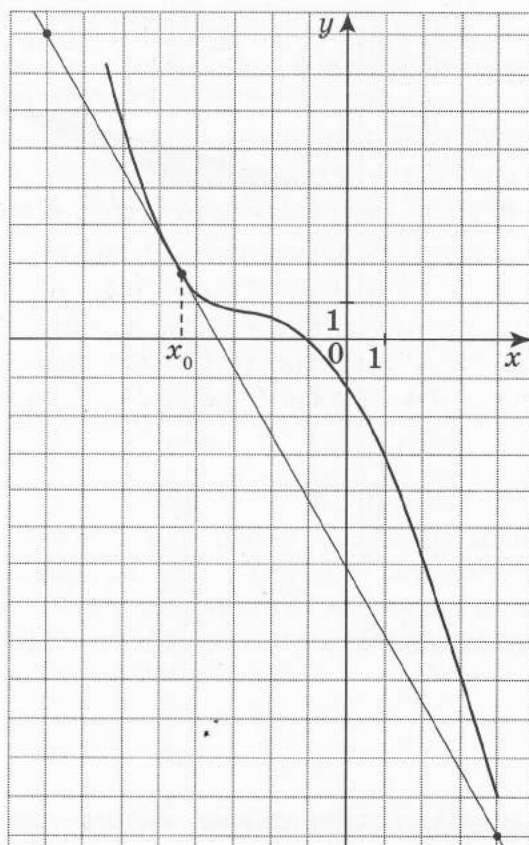
Ответ: _____.

6

Один угол параллелограмма больше другого на 12° . Найдите больший угол параллелограмма.

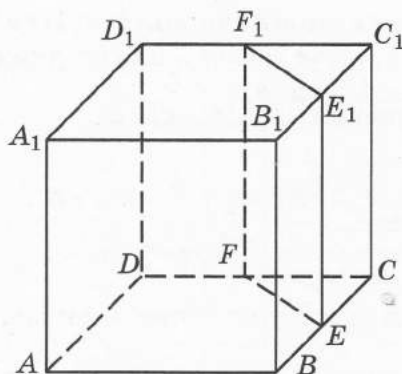
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E , F , E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC , DC , $B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 36. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{32} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{13\pi}{8}$.

Ответ: _____.

- 10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1600$ К, $a = -5$ К/мин², $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1870 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 55 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 13 \operatorname{tg} x - 13x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4 \operatorname{tg}^2 x - \frac{3}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- 14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра SB , G — середина ребра SC .

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABG и GDF .
б) Найдите угол между плоскостями ABG и GDF .

15 Решите неравенство $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 \geq 0$.

16 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 12$ и $CE = 20$.

17 1 января 2015 года Иван Сергеевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Иван Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Иван Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 тыс. рублей?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$10a + \sqrt{-7 + 8x - x^2} = ax + 3$$

имеет единственный корень.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

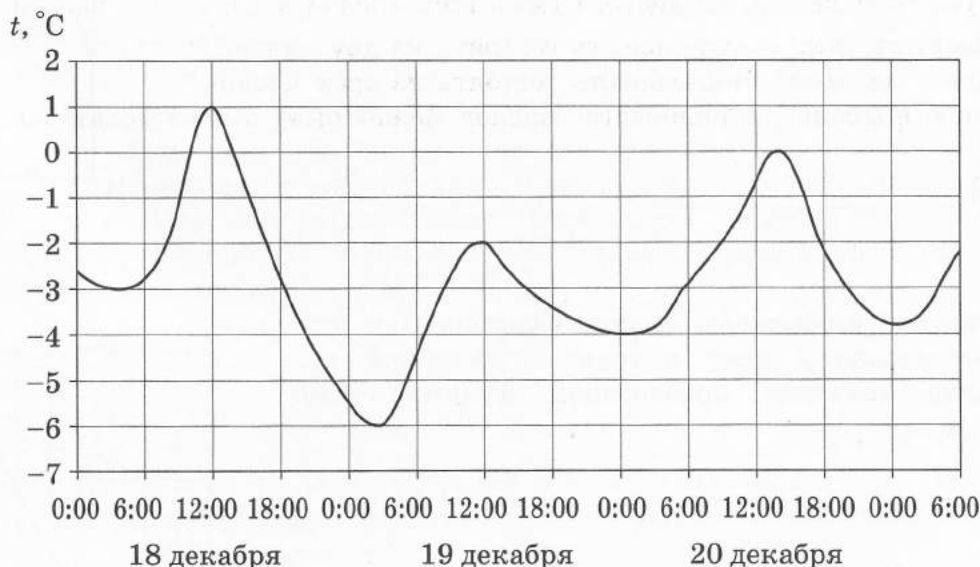
1

В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 июня счётчик показывал расход 147 куб. м воды, а 1 июля — 158 куб. м. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за июнь, если цена за 1 куб. м холодной воды составляет 20 руб. 70 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

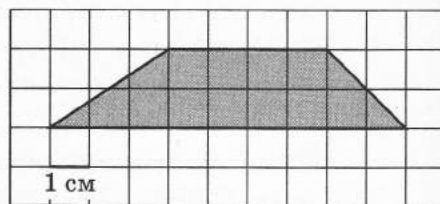
2

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 19 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

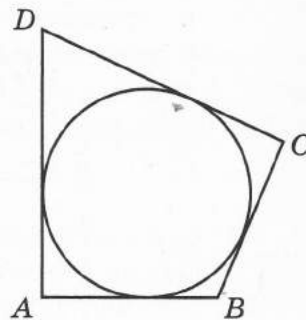
- 4 По отзывам покупателей Михаил Михайлович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,81. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,93. Михаил Михайлович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{3}{19-7x}} = 0,2$.

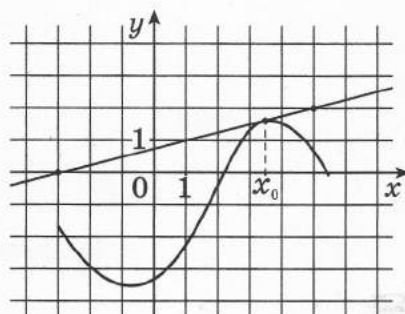
Ответ: _____.

- 6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 4$ и $CD = 25$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

8

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 7.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

Ответ: _____.

10

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 240 до 280 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

11

Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 25 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 2 часа 30 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 7 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 4]$.
- 14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.
- 15 Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}(2x^2 - 3x) \geq \log_{\frac{3x-4}{x+1}}(17x - 20 - 3x^2)$.
- 16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .
а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.
- 17 31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй — 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

- 18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| \leq 16.$$

- 19 На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 .

- Сколько чисел написано на доске?
- Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

ВАРИАНТ 28

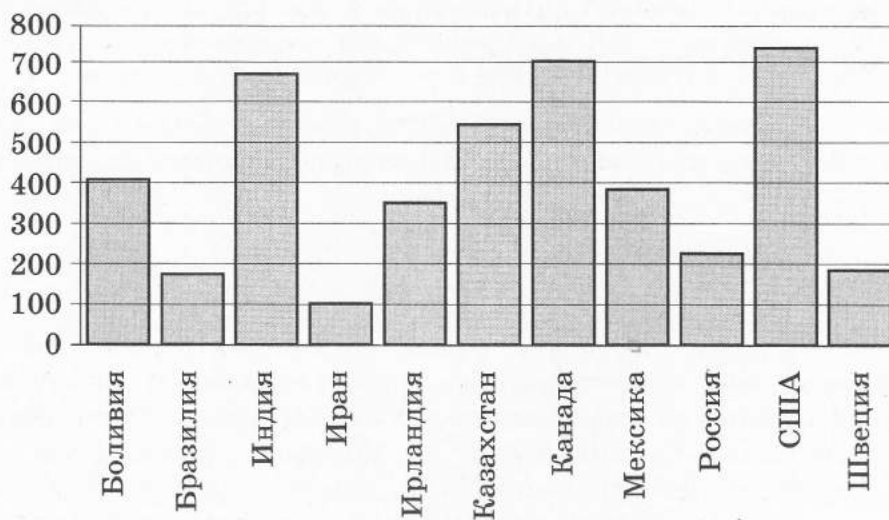
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 33 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

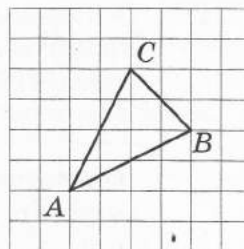
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Россия?



Ответ: _____.

- 3 Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины C , если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: _____.

- 4 На тарелке 16 пирожков: 8 с мясом, 3 с яблоками и 5 с луком. Настя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с мясом.

Ответ: _____.

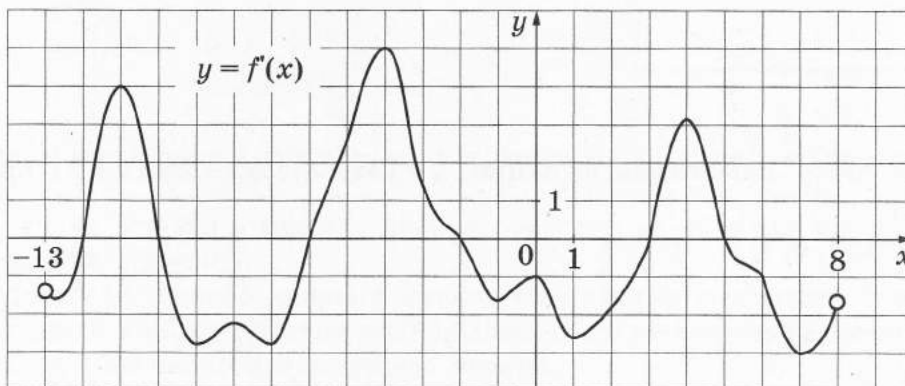
- 5 Найдите корень уравнения $x^2 + 9 = (x - 1)^2$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 23° , угол CAD равен 49° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

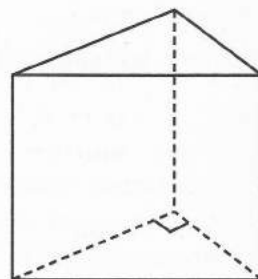
- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 6]$.



Ответ: _____.

8

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Объём призмы равен 120. Найдите её боковое ребро.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $8^{0,24} \cdot 16^{0,32}$.

Ответ: _____.

10

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 26$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м?

Ответ: _____.

11

Игорь и Паша красят забор за 12 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 20 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ: _____.

12

Найдите точку максимума функции $y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 2$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.

14

Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

15

Решите неравенство $2^{1+\log_3 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_3 4} \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_1(3x+4)}{3}}$.

16

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$ и $AH = 2\sqrt{5}$.

17

15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{3x + 3 - 2ax}{x^2 + 2(2a + 1)x + 4a^2 + 4a + 2}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

19

- а) Приведите пример натурального числа, которое в 15 раз больше суммы своих цифр.
- б) Существует ли натуральное число, которое в 21 раз больше суммы своих цифр?
- в) Найдите все натуральные числа, которые в 15873 раза больше суммы своих цифр.

ВАРИАНТ 29

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

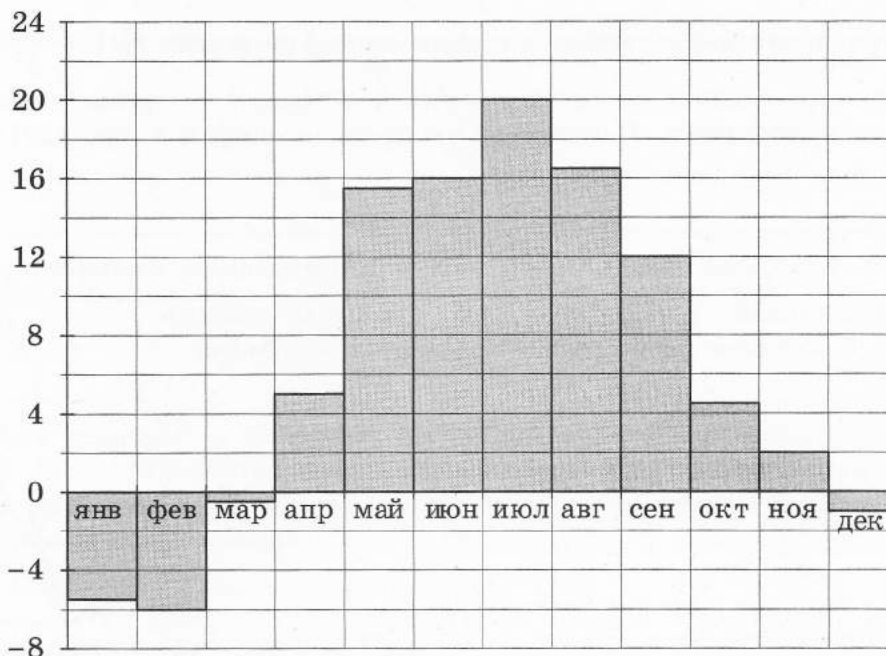
1

На бензоколонке «Бета» один литр бензина стоит 32 руб. 20 коп. Водитель залил в бак 30 литров бензина и купил бутылку воды за 22 руб. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Ответ: _____.

2

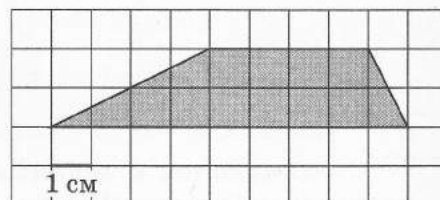
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в осенние месяцы 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью $0,9$. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью $0,02$. Известно, что 66% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $\sqrt{19 - 3x} = 5$.

Ответ: _____.

6

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 38° , угол CAD равен 44° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

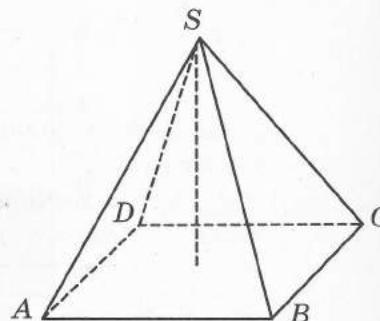
7

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^4 + 4t^3 - 7t^2 - 5t - 5$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

Ответ: _____.

8

В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 6 , боковое ребро равно 8 . Найдите её объём.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $-17\sqrt{2}\sin(-45^\circ)$.

Ответ: _____.

10 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 2 \cdot 10^2 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не ниже $6,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$?
Ответ выразите в кубических метрах.

Ответ: _____.

11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 25 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 12x + 40}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

15 Решите неравенство $2 \cdot 16^{-x} - 17 \cdot 4^{-x} + 8 \leq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 3$.

17 В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18 Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$.

19 На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

ВАРИАНТ 30

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

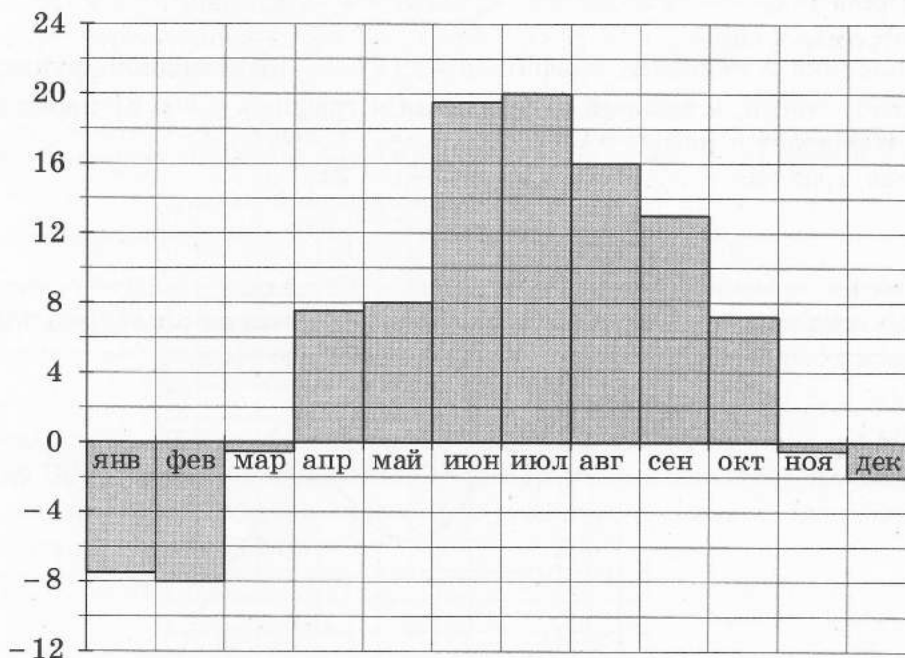
1

Когда на русский язык переводили фантастический роман Жюль Верна «20 000 льё под водой», перевели и единицы расстояния тоже. Переводчики использовали почтовое льё, в котором примерно 4 километра. В результате получился роман «80 000 километров под водой». Но в 1 морском льё не 4 километра, а примерно 5,557 км. На сколько километров больше получилось бы у переводчиков, если бы они использовали не почтовое льё, а морское?

Ответ: _____.

2

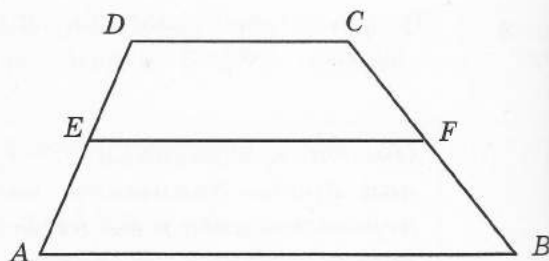
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1999 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 Средняя линия трапеции равна 18, а меньшее основание равно 10. Найдите большее основание трапеции.

Ответ: _____.



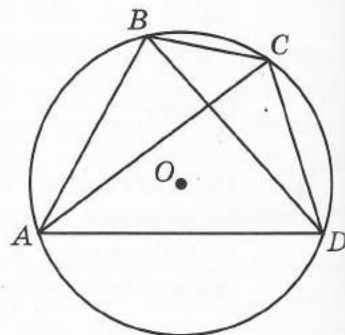
- 4 На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(x + 4)^5 = 243$.

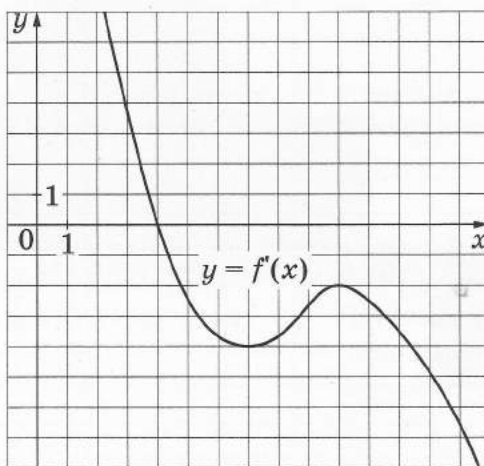
Ответ: _____.

- 6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 116° , угол CAD равен 72° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

8

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1,5. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

Ответ: _____.

10

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 80$ мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

Ответ: _____.

11

Валя и Галя пропалывают грядку за 8 минут, а одна Галя — за 10 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Валя?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке $[0,5; 2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $14 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4; -2]$.

- 14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

- 15 Решите неравенство $2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$.

- 16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

- 17 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

- 18 Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение $\frac{\sin x - b \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{b+2}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 19 На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5.
- а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

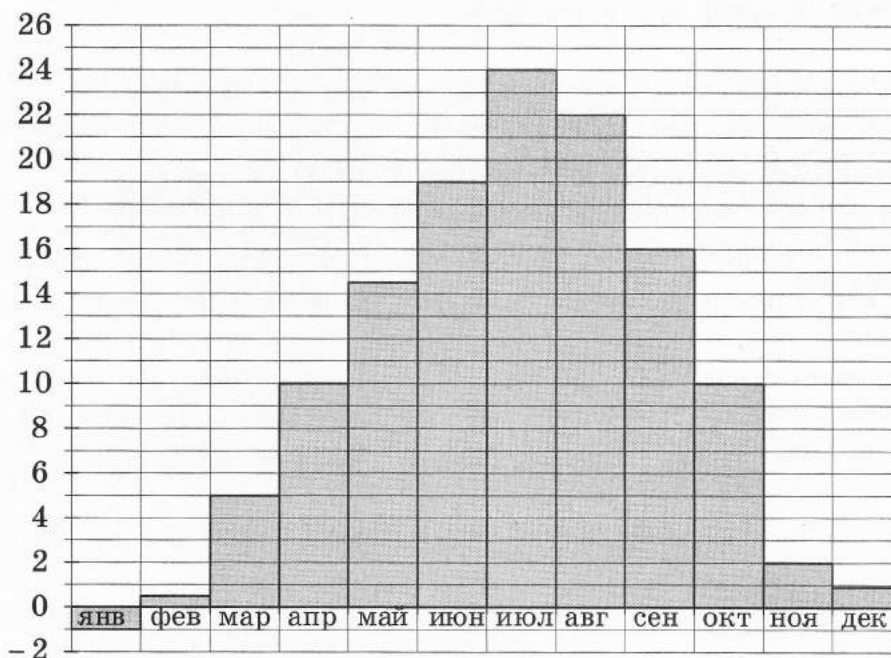
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Теплоход рассчитан на 900 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: _____.

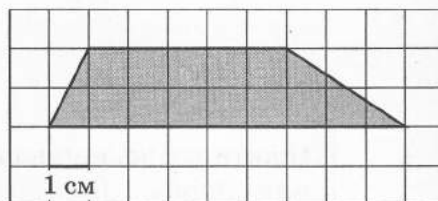
- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в осенние месяцы 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4

В некоторой местности наблюдения показали:

1. Если июньское утро ясное, то вероятность дождя в этот день $0,1$.
 2. Если июньское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна $0,4$.
 3. Вероятность того, что утро в июне будет пасмурным, равна $0,3$.
- Найдите вероятность того, что в случайно взятый июньский день дождя не будет.

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $\frac{1}{12x - 11} = \frac{1}{4}$.

Ответ: _____.

6

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 36° , угол CAD равен 25° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

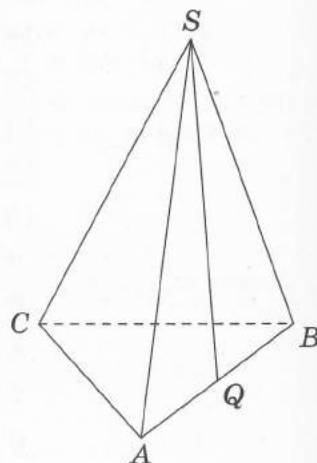
7

Прямая $y = x + 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

8

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ Q — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 7$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 42 . Найдите длину отрезка SQ .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{7^{12,2}}{49^{4,6}}$.

Ответ: _____.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности I , оперативности S , объективности публикаций T , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3I + S + 2T + Q}{A}.$$

Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило рейтинг 100?

Ответ: _____.

11 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 2 часа 40 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

12 Найдите точку минимума функции $y = (6 - 4x)\cos x + 4\sin x + 6$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-4\pi; -3\pi]$.
- 14 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.
а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.
- 15 Решите неравенство $\log_5^2(25 - x^2) - 3\log_5(25 - x^2) + 2 \geq 0$.
- 16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .
а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 4$ и $AH = \sqrt{15}$.
- 17 В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9a + \sqrt{15 + 2x - x^2} = ax + 4$$

имеет ровно два решения.

19

На доске написано более 45, но менее 63 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

ВАРИАНТ 32

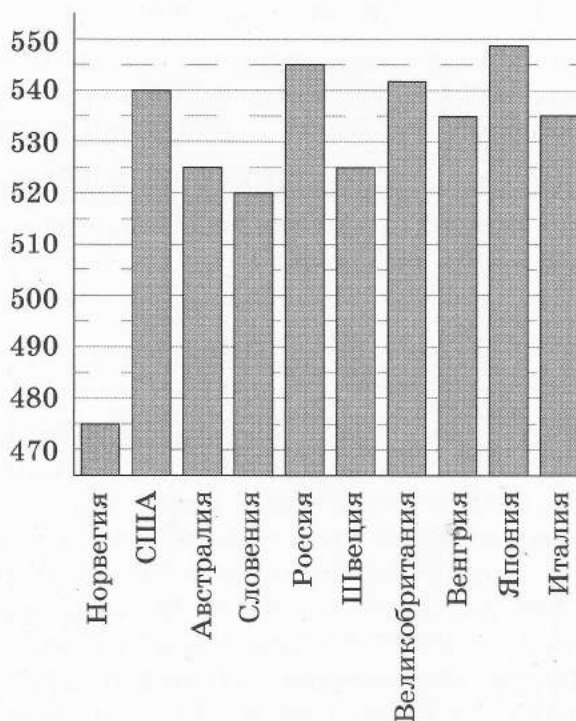
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Чайные клиперы — самые быстрые парусные корабли. Некоторые из них могли развивать скорость до 20 узлов. Переведите в километры в час скорость клипера, который делает 15 узлов. 1 узел равняется 1 морской миле в час. 1 морская миля равняется 1852 метрам. Результат округлите до целого числа километров в час.

Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников выше, чем в Венгрии.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 4 Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинами известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вове достанется пазл с изображением животного.

Ответ: _____.

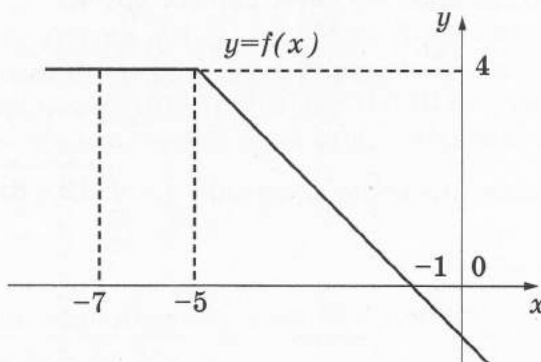
- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{x+15} = 2$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{11}{14}$, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите AB .

Ответ: _____.

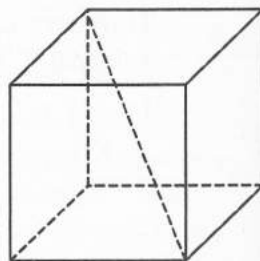
- 7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int_{-7}^{-1} f(x) dx$.



Ответ: _____.

8

Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите его объём.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $6\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: _____.

10

Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

11

Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 110 л она заполняет на 1 мин. быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-12 - 8x - x^2}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\cos 2x - \cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = AL = 2$.

а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

15

Решите неравенство $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2$.

16

Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 6 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

17

Матвей хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Матвей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{3x + 3 - 2ax}{x^2 + 2(2a + 1)x + 4a^2 + 4a + 2}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

19

Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

- а) Приведите пример числа-палиндрома, которое делится на 45.
- б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45?
- в) Найдите десятое по величине число-палиндром, которое делится на 45.

ВАРИАНТ 33

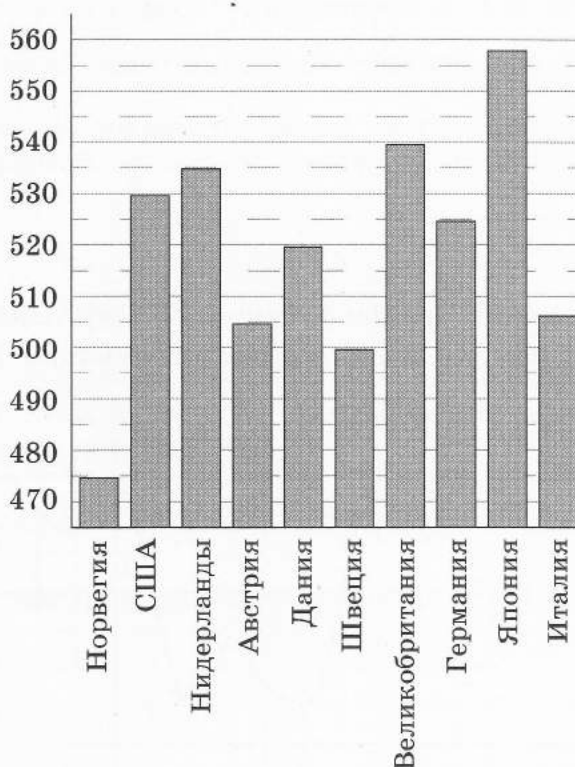
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г сахара в день. В лагере 160 человек. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 6 дней?

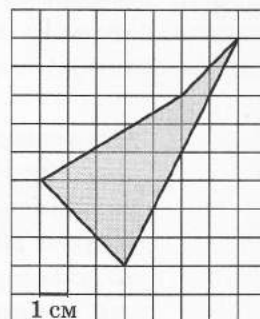
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран первое место принадлежит Японии, десятое место — Норвегии. Определите, какое место занимает Дания.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

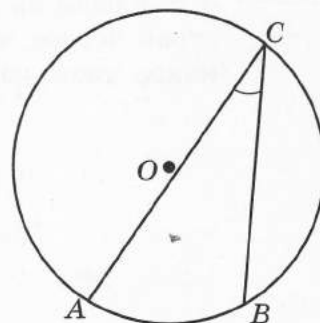
- 4 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{8x+3} = 5$.

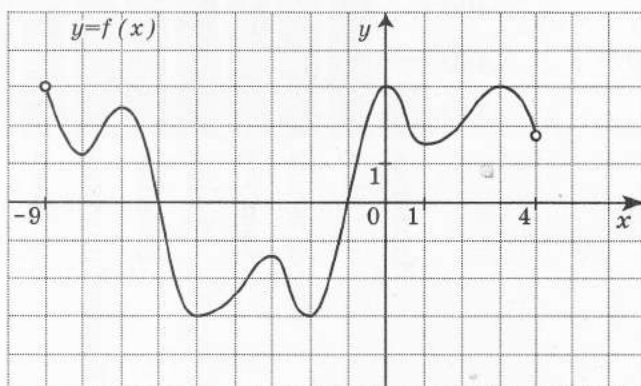
Ответ: _____.

- 6 Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{5}$ окружности.



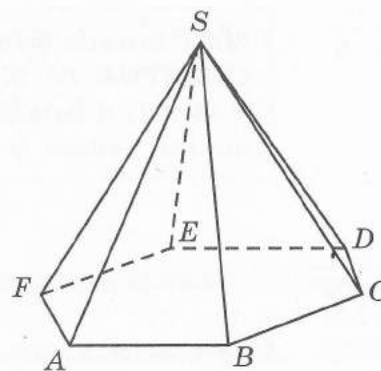
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 8 Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 12 и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите сторону основания пирамиды.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{\log_3 13}{\log_{81} 13}$.

Ответ: _____.

- 10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 45$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите,

на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

- 11 По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 1200 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+8)^3 - 3x$ на отрезке $[-7,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x = 0$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.
- 14** Вокруг единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре $B_1 C_1$ взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 75° с плоскостью ABC .
а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.
- 15** Решите неравенство $\frac{1}{5^x + 31} \leq \frac{4}{5^{x+1} - 1}$.
- 16** Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
б) Известно, что радиус этих окружностей равен 2, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 6. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.
- 17** 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 822 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года кредитования?

- 18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x + 2a| - 3a + |3x - a| + 4a \leq 7x + 24$$

выполняется для всех значений $x \in [0; 7]$.

- 19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4900.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 34

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

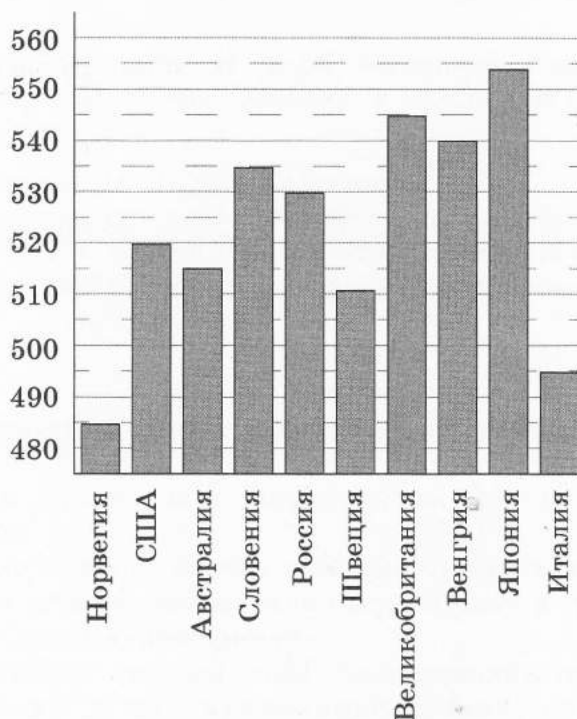
1

Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 14 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 8 кг в течение суток?

Ответ: _____.

2

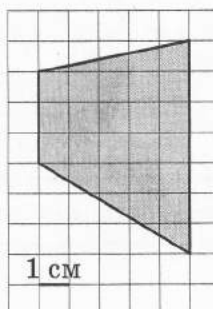
На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла российских участников не больше чем на 15 (саму Россию не считайте).



Ответ: _____.

3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4

Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 15 с персонажами мультфильмов и 15 с видами природы. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вите достанется пазл с видами природы.

Ответ: _____.

5

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{6-5x}} = \frac{1}{6}$.

Ответ: _____.

6

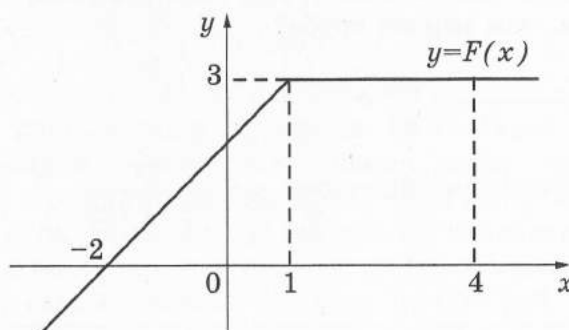
Сумма трёх углов выпуклого четырёхугольника равна 325° . Найдите его четвёртый угол.

Ответ: _____.

7

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком,

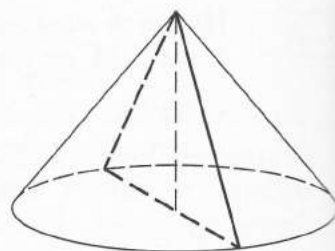
вычислите определённый интеграл $\int_{-2}^4 f(x) dx$.



Ответ: _____.

8

Высота конуса равна 15, а длина образующей — 17. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{63} - \sqrt{175}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

10

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности I , оперативности S , объективности публикаций T , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3I + S + 2T + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

11

Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 870 л она заполняет на 1 мин быстрее, чем первая труба?

Ответ: _____.

12

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 729}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\left((0,04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC все рёбра равны 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S и перпендикулярной отрезку, соединяющему середины рёбер AB и BC .

б) Найдите расстояние от плоскости этого сечения до центра грани SAB .

15

Решите неравенство $\log_{|x|}(x-1)^2 \leq 2$.

16

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 10 и 13 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

17

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

- 18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a} - 2\cos x + 1}{(\sin x)^2 + a + 2\sqrt{a} + 1}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

- 19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8959.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 35

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

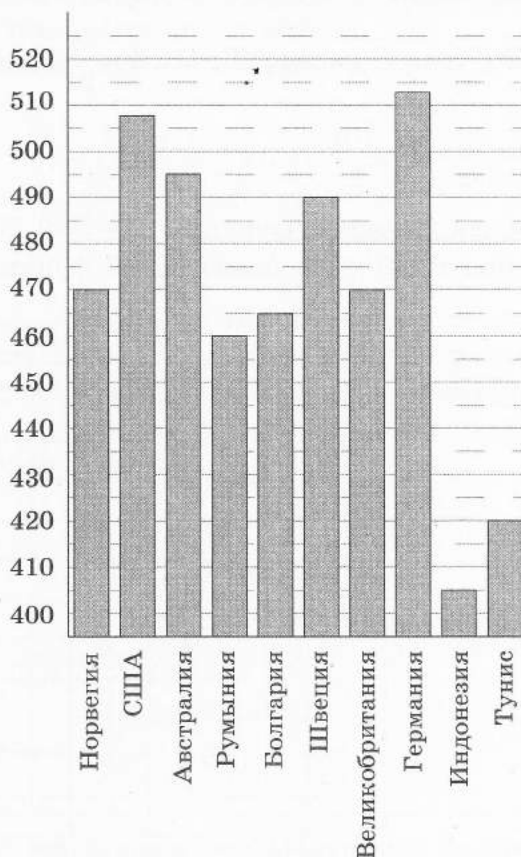
1

Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 8%. Книга стоит 575 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Ответ: _____.

2

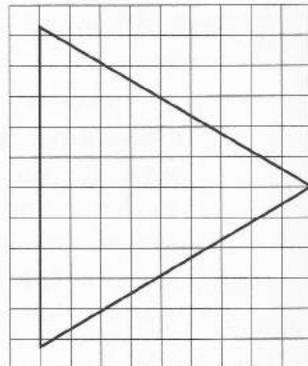
На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл отличается от среднего балла норвежских участников менее чем на 15 (саму Норвегию не считайте).



Ответ: _____.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.



Ответ: _____.

4

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Ответ: _____.

5

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{11-x}} = 1$.

Ответ: _____.

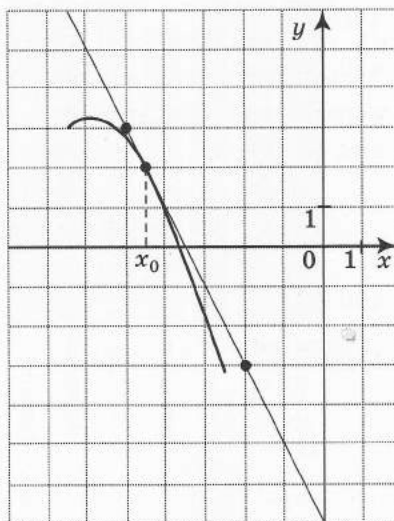
6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{8}{21}$, $AC = \sqrt{377}$. Найдите AB .

Ответ: _____.

7

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

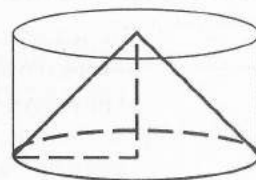


Ответ: _____.

8

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $22\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{392^2 - 388^2}}{\sqrt{195}}$.

Ответ: _____.

10

Автомобиль разгоняется с места с постоянным ускорением $a = 0,2$ м/с² и через некоторое время достигает скорости $v = 10$ м/с. Какое расстояние к этому моменту прошёл автомобиль? Ответ выразите в метрах.

Скорость v , пройденный путь l , время разгона t и ускорение a связаны соотношениями

$$v = at, l = \frac{at^2}{2}.$$

Ответ: _____.

11

По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 40 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 350 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского поезда, равно 24 секундам. Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^2 - 2x$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\cos 4x - \sin 2x = 0$.

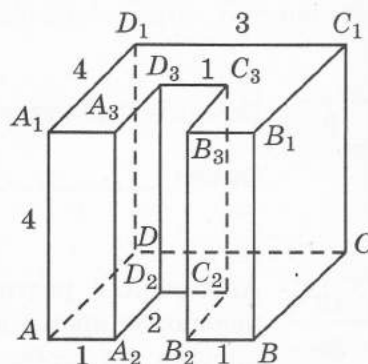
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

14

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые.

а) Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

б) Найдите площадь этого сечения.



15

Решите неравенство $3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 9$.

16

Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x - 2a| + 3a + |3x + a| - 4a \leq 5x + 24$$

выполняется для всех значений $x \in [0; 6]$.

19

Первый набор чисел состоит из чисел $2, 4, 8, \dots, 2^{10}$. Второй набор состоит из чисел $3, 9, 27, \dots, 3^{10}$. Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте — число из первого набора, а на втором — число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили. Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

ВАРИАНТ 36

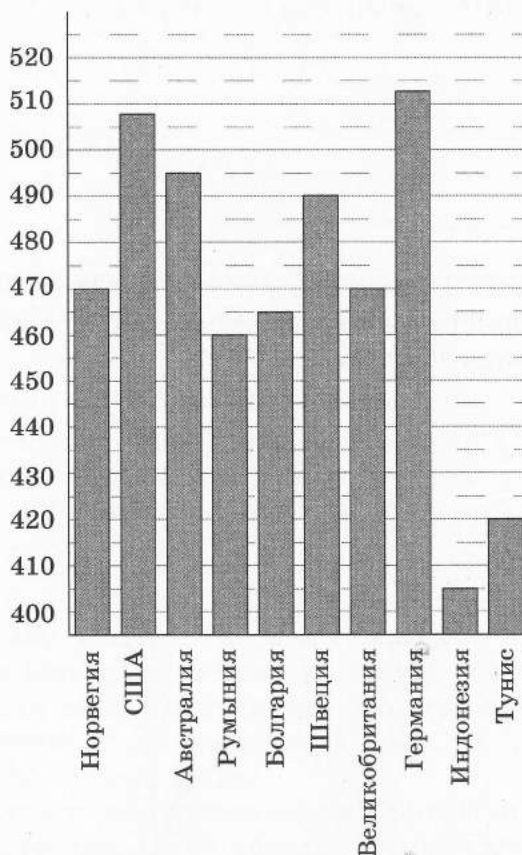
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 На счету Ленинского мобильного телефона было 72 рубля, а после разговора с Русланом осталось 9 рублей. Сколько минут длился разговор с Русланом, если одна минута разговора стоит 3 рубля.

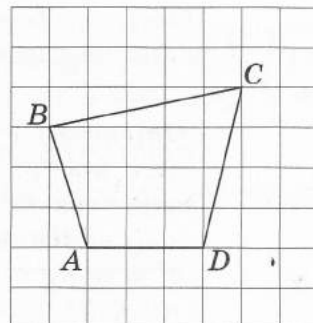
Ответ: _____.

- 2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран первое место принадлежит Германии. Определите, какое место занимает Швеция.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клеток $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён четырёхугольник $ABCD$. Найдите диагональ BD .



Ответ: _____.

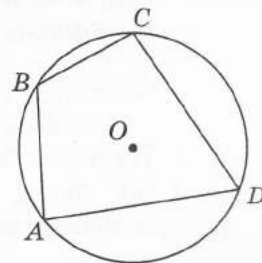
- 4 Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4}{3x-17}} = \frac{1}{2}$.

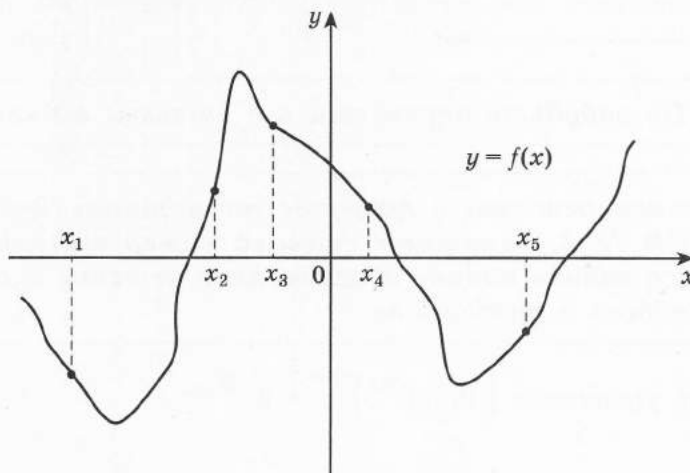
Ответ: _____.

- 6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 103° и 131° . Найдите меньший из оставшихся углов.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди пяти точек x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и x_5 те, в которых производная функции $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.



Ответ: _____.

- 8 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π , а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения $\frac{\log_4 11}{\log_{64} 11}$.

Ответ: _____.

- 10 Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 11 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- 11 Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 30 км/ч. Обрато он летел на самолёте со скоростью 570 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 484}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\left((0,25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = AL = 4$.

- а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.
б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

15 Решите неравенство $\log_2(4^x + 81^x - 4 \cdot 9^x + 3) \geq 2x$.

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

- а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

17 Олег хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Олег взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 280 тысяч рублей?

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 3| = |x + a - 3| - (a - 3)^2$$

имеет нечётное число корней.

19 Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все члены последовательности $a_n = 20^{bn}$, где b — целое неотрицательное. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

ОТВЕТЫ

Каждое правильно выполненное задание 1–12 оценивается 1 баллом. Задания 1–12 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Вариант 1

№ задания	Ответ
1	393
2	14
3	15
4	0,1
5	5
6	102
7	4
8	14
9	1
10	0,52
11	20
12	–19
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}$
14	232
15	$(-\infty; \log_7 4]; (1; \log_7 8)$
16	1:2
17	14
18	$-3,1 \leq a < -2,5; -2,5 < a < 2,5;$ $2,5 < a \leq 3,1$
19	а) да; б) нет; в) 29

Вариант 2

№ задания	Ответ
1	417
2	–14
3	6
4	0,35
5	7
6	84
7	3
8	20
9	2
10	0,21
11	25
12	–22
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$
14	1170
15	$(-\infty; 1); [\log_5 6; \log_5 9)$
16	1:4
17	12
18	$-0,75 \leq a < -0,25;$ $-0,25 < a < 0,25; 0,25 < a \leq 0,75$
19	а) да; б) нет; в) 19

Вариант 3

№ задания	Ответ
1	179
2	16
3	9
4	0,3
5	12
6	26
7	4
8	16
9	-8
10	2,7
11	20
12	-17
13	а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$
14	$2\sqrt{15}$
15	$(-\infty; 0); [\log_7 3; \log_7 6)$
16	$\frac{1}{4}$
17	20
18	$0 < a < 4,5; 4,5 < a < +\infty$
19	а) да; б) нет; в) 1

Вариант 4

№ задания	Ответ
1	237
2	-10
3	12
4	0,25
5	17
6	19
7	4
8	24
9	-6
10	10
11	10
12	-13
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{17\pi}{4}; \frac{19\pi}{4}$
14	$\frac{9\sqrt{10}}{4}$
15	$(-\infty; 1); (\log_2 5; 3]$
16	$\frac{1}{2}$
17	8
18	$0 < a < 0,5; 0,5 < a < +\infty$
19	а) да; б) нет; в) 1

Вариант 5

№ задания	Ответ
1	14
2	4
3	12
4	0,1
5	1,5
6	92
7	7
8	17
9	11
10	2,6
11	16
12	3
13	а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$
14	$2\sqrt{14}$
15	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right); [1; \log_4 5);$ $(\log_4 5; \log_4 7]$
16	$\frac{600}{169}$
17	6
18	$3 < a < 7$
19	а) да; б) нет; в) 7

Вариант 6

№ задания	Ответ
1	12
2	3
3	24
4	0,25
5	4
6	80
7	9
8	33
9	19
10	4,8
11	18
12	5
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$
14	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
15	$[-\infty; \log_3 2); [1; \log_3 4);$ $(\log_3 4; \log_3 6)$
16	$\frac{192}{25}$
17	7
18	$0,5 < a < \frac{9}{16}$
19	а) да; б) нет; в) 6

Вариант 7

№ задания	Ответ
1	8
2	20
3	16,5
4	0,55
5	-25
6	63
7	1
8	100
9	0,8
10	2,5
11	9
12	3
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6};$
14	44
15	0; $(1; \log_2 3)$
16	$\frac{116}{7}$
17	3
18	$-5 \leq a < 5\sqrt{2} - 10$
19	а) да; б) нет; в) 18,5

Вариант 8

№ задания	Ответ
1	468
2	4
3	10
4	0,3
5	-18
6	116
7	4
8	158
9	11
10	40
11	180
12	16
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$
14	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{26}}{4}$
15	$(-\infty; 0]; (\log_3 2; 1)$
16	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$
17	1 233 000 рублей
18	$a > 1,5$
19	а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$

Вариант 9

№ задания	Ответ
1	17
2	17
3	14
4	0,96
5	3,5
6	36
7	4
8	7
9	2
10	5
11	30
12	11
13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{6}$
14	30°
15	$\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right); (8; 32)$
16	30
17	2009
18	$a = -1$
19	а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел)

Вариант 10

№ задания	Ответ
1	8
2	-2
3	6
4	0,75
5	2
6	15
7	8
8	2,5
9	4,5
10	33
11	50
12	14
13	а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{14\pi}{3}$
14	б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$
15	0; (1; 2)
16	$\frac{115}{6}$
17	10
18	$-5\sqrt{5} < a \leq -5;$ $5 \leq a < 5\sqrt{5}$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

Вариант 11

№ задания	Ответ
1	70 125
2	7
3	3
4	0,2
5	0,4
6	35
7	1
8	3,5
9	-3,5
10	9,2
11	10
12	-77
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{6}$
14	б) $8 + 2\sqrt{2}$
15	$(-\infty; -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -1];$ $0; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$
16	$\sqrt{10}$
17	20
18	$1 < a < 2$
19	а) да; б) да; в) 15

Вариант 12

№ задания	Ответ
1	4
2	3
3	12
4	0,32
5	-2
6	0,25
7	10
8	20
9	2
10	301
11	513
12	48
13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$
14	$\arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$
15	$(-\infty; \log_7 4); (1; \log_7 9]$
16	113
17	2 928 200
18	$\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$
19	а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$

Вариант 13

№ задания	Ответ
1	140
2	10
3	49
4	0,55
5	-1
6	0,41
7	-3
8	216
9	7
10	0,6
11	96
12	-1
13	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\pi - \arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ $\arccos \frac{3}{4} + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\pi + \arccos \frac{3}{4}; \frac{5\pi}{2}$
14	$\arccos \frac{14}{55}$
15	$[-1; \log_5 3]$
16	1 : 2
17	932 400 рублей
18	$-\frac{18}{41}; \frac{18}{23}$
19	а) 625; б) да; 324; в) 11

Вариант 14

№ задания	Ответ
1	3
2	8
3	9
4	0,35
5	-2
6	0,75
7	7
8	10
9	2
10	501
11	551
12	-40
13	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$
14	$\arctg \frac{\sqrt{10}}{3}$
15	$(-\infty; -4); [-\log_3 7; +\infty)$
16	6
17	600 000 рублей
18	$1 - \sqrt{10} < a < -2; a = 0$
19	а) да; б) 13; в) $\frac{12}{25}$

Вариант 15

№ задания	Ответ
1	16
2	1800
3	20
4	0,993
5	2
6	108
7	9
8	7
9	5
10	10
11	21
12	3
13	а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) -2π
14	$\operatorname{arctg} \frac{2}{5}$
15	$1; \left(\frac{3}{2}, 3\right)$
16	5
17	60 кг
18	$-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$
19	а) 5115; б) 33; в) 59 295

Вариант 16

№ задания	Ответ
1	279
2	1400
3	4
4	0,2
5	8,75
6	116
7	-0,5
8	4
9	-23
10	13
11	29
12	3
13	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$
14	$\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$
15	$\left(0; \frac{1}{9}\right]; \left[\frac{1}{3}; 3\right)$
16	25 : 24
17	65 000 000 рублей
18	$1 \leq a < 2$
19	а) 16; б) 1280

Вариант 17

№ задания	Ответ
1	13
2	7
3	15
4	0,025
5	-0,25
6	8,4
7	3
8	60
9	2
10	8,6
11	48
12	-2
13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$
14	$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$
15	$[-1; 0); (0; 3]$
16	4
17	12
18	$-2 < a < -1; 1 < a < 2$
19	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 18

№ задания	Ответ
1	81
2	7
3	30
4	0,25
5	-3
6	132
7	7
8	1,6
9	14
10	41,25
11	54
12	11
13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{3}$
14	$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$
15	$[0; 2]$
16	2
17	1
18	$0 < a \leq 1$
19	а) нет; б) да; в) 1347

Вариант 19

№ задания	Ответ
1	211
2	4
3	15
4	3
5	5
6	3
7	2
8	16
9	1
10	12,8
11	90
12	2
13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$
14	$5\sqrt{3}$
15	$(-12; -3]; (-2; 0); (0; 2); [4; +\infty)$
16	2
17	120
18	$(-\infty; 7 - 2\sqrt{6}]; [7 + 2\sqrt{6}; 15);$ $(15; +\infty)$
19	а) нет; б) нет; в) 16

Вариант 20

№ задания	Ответ
1	5
2	8
3	9
4	0,2
5	0,5
6	120
7	2
8	36
9	14
10	4
11	48
12	523
13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{19\pi}{6}$
14	100π
15	$[0; 3]; (5; 6)$
16	3,5
17	411 000 рублей
18	$-\sqrt{6} < a < -\sqrt{2}; \sqrt{2} < a < \sqrt{6}$
19	а) нет; б) да; в) 989

Вариант 21

№ задания	Ответ
1	8
2	6
3	18
4	0,93
5	2
6	0,6
7	4
8	15
9	18
10	8
11	42
12	14
13	а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}; -4\pi$
14	$\arctg 2\sqrt{2}$
15	$\left(\frac{3}{2}; 2\right]; [3; 6)$
16	3
17	517 500 рублей
18	$-\sqrt{6} < a < -2; 2 < a < \sqrt{6}$
19	1; 2

Вариант 22

№ задания	Ответ
1	8
2	8
3	690
4	0,4
5	-252
6	82
7	4,5
8	4
9	28
10	0,37
11	9
12	4
13	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\arctg \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\arctg \frac{1}{3} + 2\pi; \frac{11\pi}{4}$; $\arctg \frac{1}{3} + 3\pi$
14	$\pi\sqrt{10}$
15	$\left(-\infty; \frac{8}{9}\right]; \left[\frac{17}{9}; +\infty\right)$
16	8
17	4 884 100 рублей
18	1
19	а) 729; б) да; 576 в) 17

Вариант 23

№ задания	Ответ
1	36
2	7
3	0,8
4	0,973
5	1
6	15
7	0,25
8	57
9	-15
10	75
11	49
12	7
13	а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) -2π
14	30°
15	$\left(\frac{15}{8}; 2\right)$
16	$6\sqrt{3}$
17	9 282 000 рублей
18	$[-1,5; -0,375); 0$
19	а) нет; б) да; в) 963

Вариант 24

№ задания	Ответ
1	3
2	5
3	4
4	0,3125
5	1,5
6	12
7	6
8	120
9	3
10	2
11	45
12	-10
13	а) $-\arctg \frac{2}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{15\pi}{4}; 4\pi - \arctg \frac{2}{5}$
14	90°
15	$[-1; 0]; (3; 4)$
16	$\frac{50\sqrt{3}}{3}$
17	40 кг
18	$a = -5; a = -1$
19	63, 504 и 10 584; 63, 504 и 15 876 или 63, 504 и 31 752

Вариант 25

№ задания	Ответ
1	120
2	460
3	26
4	0,15
5	1
6	138
7	5
8	19
9	-5
10	50
11	16
12	3
13	а) $-\arctg \frac{1}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{7\pi}{4}; 2\pi - \arctg \frac{1}{8}$
14	$\arccos \frac{1}{\sqrt{33}}$
15	$[0; 2); (2; 4]$
16	12
17	179 250 рублей
18	$-\frac{7}{3} \leq a \leq \frac{31}{3}$
19	18, 144 и 1296 или 18, 144 и 2592

Вариант 26

№ задания	Ответ
1	23
2	27
3	3
4	0,037
5	-26
6	96
7	-1,75
8	288
9	-4
10	3
11	8
12	5
13	а) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) 3π
14	$\arccos \frac{9}{11}$
15	$(-\infty; 1]; [3, +\infty)$
16	56,5
17	6
18	$0; \left(\frac{1}{3}; 1\right]$
19	а) нет; б) да; в) 867

Вариант 27

№ задания	Ответ
1	227,7
2	4
3	13
4	0,0133
5	-8
6	29
7	0,25
8	42
9	-0,5
10	40
11	15
12	2
13	а) $0; \log_2 7$; б) $\log_2 7$
14	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$
15	$2; \left(\frac{5}{2}; 4\right)$
16	67,5
17	10
18	$[0,2; 0,6]$
19	а) 42; б) положительных; в) 24

Вариант 28

№ задания	Ответ
1	10 065
2	8
3	3
4	0,5
5	-4
6	59
7	2
8	5
9	4
10	30
11	10
12	1,5
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{2}$
14	5
15	$[-1; 0); (0; 4]$
16	$42 + 18\sqrt{5}$
17	118
18	$\left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right]; \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; 1,5\right);$ $(1,5; +\infty)$
19	а) 135; б) да; 378; в) 428571

Вариант 29

№ задания	Ответ
1	12
2	12
3	13
4	0,6008
5	-2
6	54
7	55
8	112
9	17
10	0,008
11	52
12	2
13	а) $-\frac{3}{2}; 4$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3}{2}; \frac{2\pi}{3}$
14	$3\sqrt{\frac{5}{2}}\pi$
15	$\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$
16	40
17	1320
18	$(-\infty; 1]$
19	а) 55; б) отрицательных; в) 25

Вариант 30

№ задания	Ответ
1	31 140
2	-8
3	26
4	0,25
5	-1
6	44
7	4
8	13,5
9	0,5
10	8
11	40
12	9
13	а) $-\log_2 7; -1$; б) $-\log_2 7$
14	$\frac{12}{5}$
15	$[-2; 0]; (0; 3]$
16	$\frac{51 + 36\sqrt{2}}{2}$
17	125 000 рублей
18	$b = -1, b \geq 0$
19	а) 60; б) положительных; в) 36

Вариант 31

№ задания	Ответ
1	19
2	2
3	14
4	0,81
5	1,25
6	94
7	1
8	4
9	343
10	0,28
11	15
12	1,5
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{2}$
14	$\frac{5\sqrt{119}}{13}$
15	$(-5; -2\sqrt{5}]; 0; [2\sqrt{5}; 5)$
16	$62 + 16\sqrt{15}$
17	200 кг
18	$\left(0; \frac{1}{3}\right]$
19	а) 54; б) положительных; в) 28

Вариант 32

№ задания	Ответ
1	28
2	4
3	24
4	0,6
5	-11
6	28
7	16
8	64
9	3
10	44
11	11
12	2
13	а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ б) $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$
14	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{9}$
15	$(0; 1); \left(1; \frac{3}{2}\right]; (2; +\infty)$
16	1:4
17	7
18	$\left(-\infty; \frac{7-2\sqrt{6}}{10}\right]; \left[\frac{7+2\sqrt{6}}{10}; 1,5\right);$ $(1,5; +\infty)$
19	а) 585; б) 11; в) 56565

Вариант 33

№ задания	Ответ
1	39
2	6
3	16
4	0,008
5	-0,35
6	72
7	-21
8	6
9	4
10	60
11	300
12	21
13	а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}$
14	$\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
15	$(-1; 3]$
16	$3 - \sqrt{5}$
17	678 000 рублей
18	$[-3; 4]$
19	а) нет; б) да; в) 753

Вариант 34

№ задания	Ответ
1	3
2	5
3	25
4	0,5
5	-6
6	35
7	13,5
8	120
9	0
10	7
11	30
12	-27
13	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $3\pi; \frac{23\pi}{6}; 4\pi$
14	1
15	$(-1; 0); \left(0; \frac{1}{2}\right]; (1; +\infty)$
16	4
17	84 000 000 рублей
18	$a = 0$
19	а) нет; б) да; в) 1119

Вариант 35

№ задания	Ответ
1	529
2	3
3	3
4	0,064
5	9
6	21
7	-2
8	22
9	4
10	250
11	450
12	4
13	а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}$
14	$10\sqrt{2}$
15	$(-\infty; 0]; [\log_3 8; +\infty)$
16	1
17	280 кг
18	$[-4; 3]$
19	$6(3^{10} - 2^{10})$

Вариант 36

№ задания	Ответ
1	21
2	4
3	5
4	0,24
5	11
6	49
7	2
8	3
9	3
10	20
11	57
12	22
13	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{9\pi}{4}; 3\pi$
14	$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{39}}{3}$
15	$(-\infty; 0]; \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$
16	7
17	6
18	$a = 1; a = 3; a = 5$
19	$0,111... = \frac{1}{9}$

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ 13–19

Количество баллов, выставаемых за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Вариант 1

13

а) Решите уравнение $6\log_3^2(2\cos x) - 11\log_3(2\cos x) + 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Заменим $\log_3(2\cos x)$ на t , тогда исходное уравнение запишется в виде $6t^2 - 11t + 4 = 0$. Получаем, что $t = \frac{4}{3}$ или $t = 0,5$.

Заменим обратно t на $\log_3(2\cos x)$.

Заметим, что $\cos x$ всегда не больше 1, а значит, неравенства $2\cos x \leq 2$ и $\log_3(2\cos x) < 1$ выполняются при любых x . Значит, t не может равняться $\frac{4}{3}$.

Если $\log_3(2\cos x) = 0,5$, значит, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) Значение выражения $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\pi\right]$, если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n \geq -\frac{7\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} 2n \geq -\frac{11}{3}, \\ 2n \leq -\frac{7}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq -\frac{11}{6}, \\ n \leq -\frac{7}{12}. \end{cases}$$

Данная система неравенств верна при $n = -1$, в таком случае $\frac{\pi}{6} + 2\pi n = -\frac{11\pi}{6}$.

Аналогично, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, принадлежит отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\pi\right]$, если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \geq -\frac{7\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq -\pi; \end{cases} \begin{cases} 2m \geq -\frac{10}{3}, \\ 2m \leq -\frac{5}{6}; \end{cases} \begin{cases} m \geq -\frac{10}{6}, \\ m \leq -\frac{5}{12}. \end{cases}$$

Данная система неравенств верна при $m = -1$, в таком случае $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m = -\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 32, а боковое ребро BB_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$; $B_1L = 28$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC .

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой AC .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка M , а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ .

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC . Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ . Рассмотрим плоскость BB_1M . Пусть эта плоскость пересекает прямые AC , KK_1 и LL_1 в точках N , E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN — прямоугольник, причём

$$BB_1 = 4\sqrt{3}, \quad B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 16\sqrt{3}; \quad MB = 4\sqrt{51}.$$

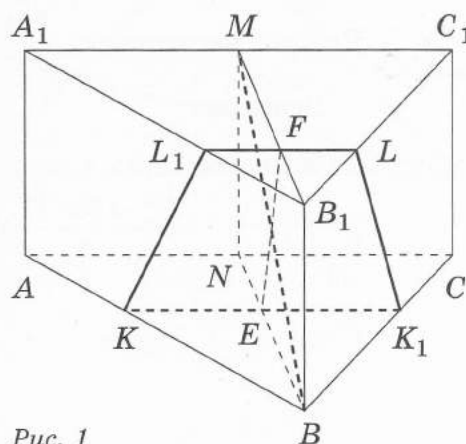


Рис. 1

По теореме Фалеса, $NE:NB = AK:AB = 1:16$, $B_1F:B_1M = B_1L:B_1C_1 = 7:8$, откуда $B_1F = 14\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Также получаем, что $EF = \sqrt{51}$.

$$\sin \angle MBB_1 = \frac{MB_1}{MB} = \frac{4}{\sqrt{17}}; \quad \sin \angle MFE = \frac{BB_1}{EF} = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (\text{рис. 2}),$$

следовательно, $\angle MBB_1 = \angle MFE$. Получаем, что

$$\angle MFE + \angle FMB = \angle MFE + (90^\circ - \angle MBB_1) = 90^\circ,$$

то есть прямые MB и EF перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC , которая перпендикулярна плоскости BB_1M . Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM , поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Расстояние от точки M до плоскости γ равно MO , где O — точка пересечения прямых MB и EF , а площадь трапеции KL_1LK_1 равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{15}{16}AC + \frac{7}{8}A_1C_1}{2} \cdot EF = \frac{29}{16} \cdot \frac{AC \cdot EF}{2}.$$

Искомый объём равен

$$\frac{1}{3} \cdot MO \cdot \frac{29}{16} \cdot \frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{29AC}{48} \cdot \frac{MO \cdot EF}{2} = \frac{29AC}{48} S_{MFE} = \frac{29AC}{48} \cdot \frac{MF \cdot BB_1}{2} = 232.$$

Ответ: б) 232.

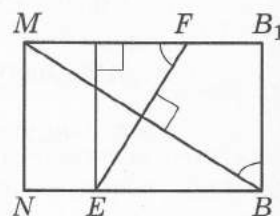


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{2 \cdot 49^x - 16 \cdot 7^x + 11}{7(7^{x-1} - 1)} + \frac{5 \cdot 7^x - 36}{7^x - 8} \leq 2 \cdot 7^x + 3$.

Решение.

Заменим 7^x на t , тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2t^2 - 16t + 11}{t - 7} + \frac{5t - 36}{t - 8} \leq 2t + 3; \quad \frac{(t-7)(2t-2)-3}{t-7} + \frac{5(t-8)+4}{t-8} \leq 2t+3;$$

$$-\frac{3}{t-7} + \frac{4}{t-8} \leq 0; \quad \frac{-3(t-8)+4(t-7)}{(t-7)(t-8)} \leq 0;$$

$$\frac{t-4}{(t-7)(t-8)} \leq 0.$$

Методом интервалов получаем, что либо $t \leq 4$, либо $7 < t < 8$.

Заменим обратно t на 7^x .

Если $7^x \leq 4$, тогда $x \leq \log_7 4$.

Если $7 < 7^x < 8$, тогда $1 < x < \log_7 8$.

Ответ: $(-\infty; \log_7 4]; (1; \log_7 8)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_7 4$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . Точка E принадлежит стороне AB , прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая BH параллельна прямой ED .

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 135^\circ$.

Решение.

а) Заметим, что точки A, B, C, H лежат на одной окружности, так как $\angle ABC + \angle CHA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит $\angle ABH = \angle ACH$ (рис. 1).

С другой стороны, точки A, E, C, D тоже лежат на одной окружности, так как $\angle ECD + \angle EAD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит $\angle ACD = \angle AED$.

Значит, $\angle AED = \angle ACD = \angle ACH = \angle ABH$, следовательно, BH параллельна прямой ED .

б) Продолжим AB и CD до пересечения, точку пересечения обозначим M (рис. 2). Тогда треугольники MBH и MED подобны по двум углам,

значит, $\frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD}$.

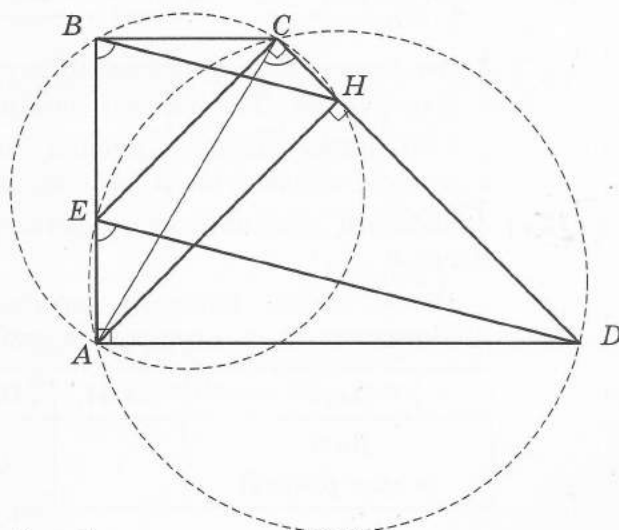


Рис. 1

Далее, $\angle AMH = 90^\circ - \angle MCB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, значит, в треугольнике MAH получаем, что $MH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$.

Аналогично, в треугольнике AMD получаем, что $\angle AMD = 45^\circ$, значит, $MD = \sqrt{2} AM$.

Получаем, что $\frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: б) 1:2.

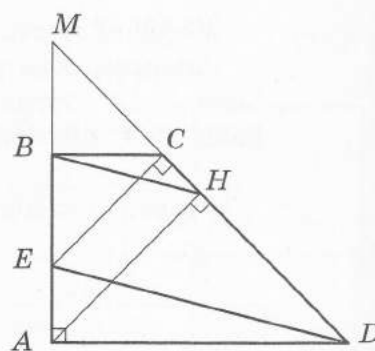


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января Аркадий планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Аркадию в общей сумме придётся выплатить больше 1,5 млн рублей.

Решение.

Обозначим через S_n — сумму, которую Аркадий выплачивает в n -ном месяце кредитования. Также для удобства произведем замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда получаем:

$S_1 = 1 \cdot k - 0,8$ (изначальный долг в один миллион рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счету должно остаться 0,8 согласно таблице).

Аналогично:

$$S_2 = 0,8 \cdot k - 0,6,$$

$$S_3 = 0,6 \cdot k - 0,5,$$

$$S_4 = 0,5 \cdot k - 0,4,$$

$$S_5 = 0,4 \cdot k - 0,3,$$

$$S_6 = 0,3 \cdot k.$$

Итого общая сумма выплат S составляет: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 3,6k - 2,6$.

Вспоминаем, что $k = 1 + \frac{r}{100}$ и решаем неравенство:

$$3,6 + \frac{3,6r}{100} - 2,6 > 1,5; \quad \frac{3,6r}{100} > 0,5; \quad r > \frac{125}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 14. Значит, искомое число процентов — 14.

Ответ: 14.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{37x^2 - 12ax + 9} = 2x^2 - 2ax + 3$$

имеет ровно три различных корня? Найдите все возможные значения a .

Решение.

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 37x^2 - 12ax + 9 = (2x^2 - 2ax + 3)^2, \\ 2x^2 - 2ax + 3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 37x^2 - 12ax + 9 = 4x^4 - 8ax^3 + 4a^2x^2 + 12x^2 - 12ax + 9, \\ 2x^2 - 2ax + 3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 8ax^3 + 4a^2x^2 - 25x^2 = 0, \\ 2x^2 - 2ax + 3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(2x - 2a + 5)(2x - 2a - 5) = 0, \\ 2x^2 - 2ax + 3 \geq 0. \end{cases}$$

Корни уравнения системы: $a - 2,5$; $a + 2,5$; 0 . По условию, нужно, чтобы они все были различны между собой, к тому же нужно, чтобы выполнялось неравенство системы. В итоге получаем:

$$\begin{cases} a - 2,5 \neq 0, \\ a + 2,5 \neq 0, \\ a - 2,5 \neq a + 2,5, \\ 2(a - 2,5)^2 - 2a(a - 2,5) + 3 \geq 0, \\ 2(a + 2,5)^2 - 2a(a + 2,5) + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 2,5, \\ a \neq -2,5, \\ -5a + 15,5 \geq 0, \\ 5a + 15,5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 2,5, \\ a \neq -2,5, \\ a \leq 3,1, \\ a \geq -3,1. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $-3,1 \leq a < -2,5$; $-2,5 < a < 2,5$; $2,5 < a \leq 3,1$.

Ответ: $-3,1 \leq a < -2,5$; $-2,5 < a < 2,5$; $2,5 < a \leq 3,1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого включением только одной точки $a = -2,5$ или $a = 2,5$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $[-3,1; 3,1]$ множества значений a	2
Получены корни уравнения $37x^2 - 12ax + 9 = (2x^2 - 2ax + 3)^2$: $x = 0$, $x = a - 2,5$, $x = a + 2,5$; и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $2x^2 - 2ax + 3 \geq 0$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

В целочисленной последовательности $a_1 = 2$, a_2 , ..., a_{n-1} , $a_n = 336$ сумма любых двух соседних членов последовательности равна или 5, или 7, или 29.

- Приведите пример такой последовательности.
- Может ли такая последовательность состоять из 812 членов?
- Какое наименьшее число членов может быть в такой последовательности?

Решение.

а) Заметим, что если $a_k + a_{k+1} = 5$, $a_{k+1} + a_{k+2} = 7$, тогда $a_{k+2} - a_k = 2$. Это значит, что можно построить последовательность, где любой член на нечётном месте на 2 больше члена на предыдущем нечётном месте. Нужная последовательность получается следующим образом:

2, 3, 4, 1, 6, -1, 8, ..., 334, -329, 336.

б) Числа 5, 7 и 29 — нечётные, значит, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. Так как первый член равен 2, все члены на нечётных местах — чётные, а на чётных — нечётные. Соответственно, 336 (чётное) должно стоять на нечётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 812 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ($1 \leq k \leq n-2$).

Поскольку $a_k + a_{k+1} \geq 5$, $a_{k+1} + a_{k+2} \leq 29$, получаем: $a_{k+2} \leq a_k + 24$.

Тогда получаем, что члены нашей последовательности должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_3 \leq a_1 + 24 = 26, \\ a_5 \leq a_3 + 24 = 50, \\ \dots \\ a_{2k+1} \leq a_{2k-1} + 24 = 2 + 24k. \end{cases}$$

Из предыдущего пункта мы помним, что 336 обязано стоять на нечётном месте. Заметим, что $336 > 2 + 24 \cdot 13$, значит, в последовательности обязано быть хотя бы $1 + 2 \cdot 14 = 29$ членов.

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 29 членов:

2, 3, 26, -21, 50, -45, 74, -69, 98, -93, 122, -117, 146, -141, 170, -165, 194, -189, 218, -213, 242, -237, 266, -261, 290, -285, 314, -307, 336.

Ответ: а) да; б) нет; в) 29.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в пункте а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Вариант 7

13

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

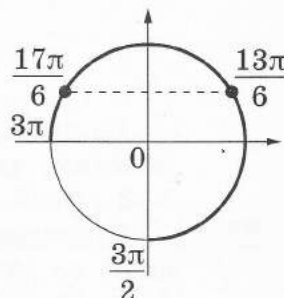
$$2 - 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0; (2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

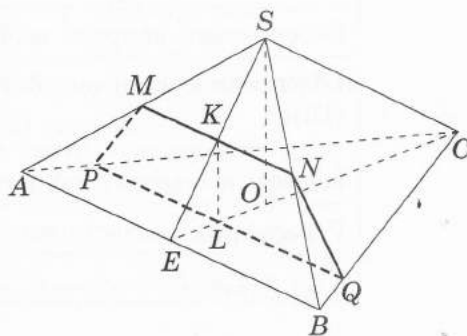
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC , поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ , параллельной MN . Рассмотрим плоскость SCE . Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN , L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ , O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC , поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC , а значит, параллельна прямой SO . Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB , точка K является серединой ES . Значит, L — середина EO . Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE = 5:1$.



б) В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN = \frac{AB}{2} = 6, \quad PQ = \frac{5AB}{6} = 10, \quad KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{11}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNQP$ равна $\frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = 44$.

Ответ: 44.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leq 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{t^2-5t+6} \leq 0; \quad \frac{2t^2-4t+2}{t^2-5t+6} \leq 0; \quad \frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)} \leq 0,$$

откуда $t = 1$; $2 < t < 3$.

При $t = 1$ получим: $2^x = 1$, откуда $x = 0$.

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 2^x < 3$, откуда $1 < x < \log_2 3$.

Решение исходного неравенства: $x = 0$; $1 < x < \log_2 3$.

Ответ: 0 ; $(1; \log_2 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q , центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD . Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D.$$

б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса $R = \frac{4}{3}$ касается боковой стороны AB в точке E , а основания AD — в точке M ; окружность радиуса $r = \frac{1}{3}$ с центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F , а основания BC — в точке N .

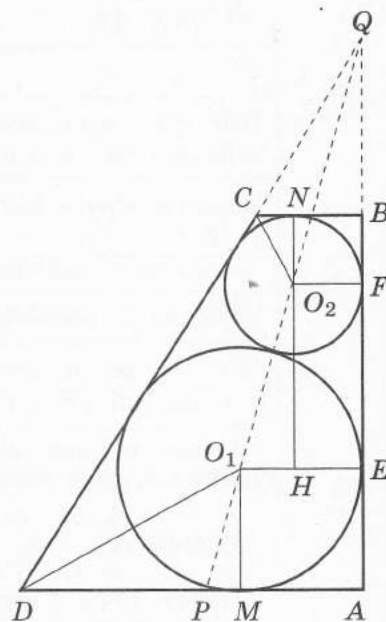
Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E . Тогда

$$O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1,$$

а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания,

$$O_1O_2 = R + r = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Значит, } EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}.$$



Обозначим $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{3}{4}$. Получаем:

$$\angle BQC = 2\alpha, \angle BCD = 90^\circ + 2\alpha, \angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45^\circ + \alpha.$$

Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) = O_2N \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 - 3}{4 + 3} = \frac{1}{21}.$$

$$\text{Следовательно, } BC = BN + NC = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21}.$$

Аналогично, $\angle O_1DM = 45^\circ - \alpha$,

$$MD = O_1M \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = O_1M \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 + 3}{4 - 3} = \frac{28}{3};$$

$$AD = AM + MD = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} = \frac{32}{3}.$$

Учитывая, что $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3$, получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{3} + \frac{8}{21} \right) \cdot 3 = \frac{116}{7}.$$

Ответ: $\frac{116}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{18S}{19}, \dots, \frac{2S}{19}, \frac{S}{19}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{18kS}{19}, \dots, \frac{2kS}{19}, \frac{kS}{19}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{19}, \frac{18(k-1)S + S}{19}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{19}, \frac{(k-1)S + S}{19}.$$

Всего следует выплатить

$$S + S(k-1) \left(1 + \frac{18}{19} + k + \frac{2}{19} + \frac{1}{19} \right) = S(1 + 10(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 30 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$10(k-1) = 0,3; \quad k = 1,03; \quad r = 3.$$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2 + y^2 \geq 25$, то получаем уравнение

$$x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = x^2 + y^2 - 25;$$

$$20x - 20y + 100 = 0;$$

$$x - y + 5 = 0.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y = x + 5$.

2) Если $x^2 + y^2 \leq 25$, то получаем уравнение

$$x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = 25 - x^2 - y^2; \quad x^2 + 10x + y^2 - 10y + 25 = 0; \quad (x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $Q(-5; 5)$ и радиусом 5.

Полученные прямая и окружность пересекаются в двух точках $A(-5; 0)$ и $B(0; 5)$, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 25$, поэтому в первом случае получаем два луча l_1 и l_2 с концами в точках A и B соответственно, во втором — дугу ω с концами в тех же точках (см. рис.). Заметим, что точка $C\left(-5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ лежит на дуге ω и отрезок QC перпендикулярен прямой, полученной в первой случае.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , параллельную лучам l_1 и l_2 или содержащую их.

При $a = -5$ прямая m содержит лучи l_1 и l_2 , то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

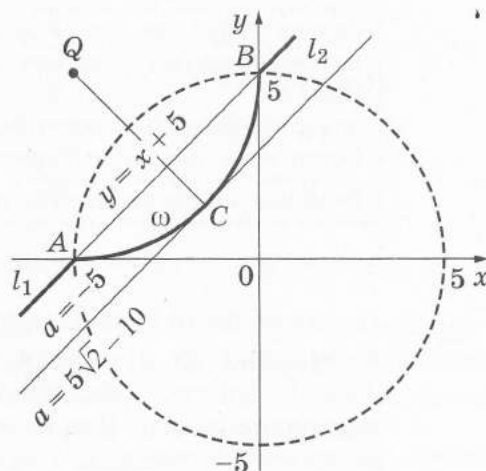
При $a = 5\sqrt{2} - 10$ прямая m проходит через точку C , значит, прямая m касается дуги ω и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 , то есть исходная система имеет одно решение.

При $-5 < a < 5\sqrt{2} - 10$ прямая m пересекает дугу ω в двух точках и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 , то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -5$ или $a > 5\sqrt{2} - 10$ прямая m не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 и дугой ω , то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более одного решения при $-5 \leq a < 5\sqrt{2} - 10$.

Ответ: $-5 \leq a < 5\sqrt{2} - 10$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = 5\sqrt{2} - 10$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуги окружности и прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

- Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
- Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
- Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске было 24 числа, равных 1, и 6 чисел, равных 31. Их среднее арифметическое равно 7. Среднее арифметическое получившихся чисел

$$\text{равно } \frac{6 \cdot 15,5}{6} = 15,5 > 14.$$

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S , а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 1, поэто-

му $\frac{S+k}{30} = 7$, то есть $S = 210 - k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{S}{2(30-k)}, \text{ откуда получаем:}$$

$$12 < \frac{210-k}{2(30-k)} < 13; \quad 720 - 24k < 210 - k < 780 - 26k; \quad 22 < \frac{510}{23} < k < \frac{114}{5} < 23.$$

Таких целых чисел k нет.

в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S , а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию $\frac{S+k}{30} = 7$, то есть $S = 210 - k$. Необходимо найти наиболь-

шее возможное значение числа $A = \frac{S}{2(30-k)}$. Имеем:

$$A = \frac{S}{2(30-k)} = \frac{210-k}{2(30-k)} = \frac{1}{2} + \frac{90}{30-k}.$$

Число A будет наибольшим, если число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 40 и на доске осталось $30-k$ чисел, поэтому для суммы S выполняется неравенство

$$210 - k = S \leq 40(30 - k),$$

откуда

$$210 - k \leq 40(30 - k); \quad 39k \leq 990; \quad k \leq \frac{330}{13} < 26; \quad k \leq 25.$$

Значит,

$$A \leq \frac{1}{2} + \frac{90}{30-25} = 18,5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 18,5. Пусть первоначально на доске было написано 25 единиц и 5 чисел, равных 37. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{25+185}{30} = 7$. Все единицы стёрли с доски, а остальные числа уменьшились в 2 раза. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{5 \cdot 37}{2 \cdot 5} = 18,5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 18,5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

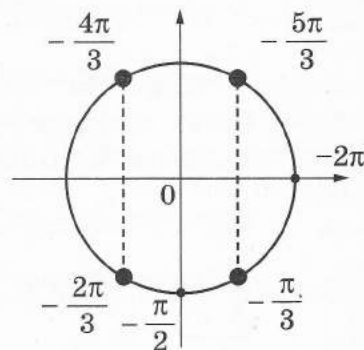
Вариант 12

13

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.**Решение.**

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,75; \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.Получим числа: $-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$.*Замечание.* Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.**Ответ:** а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Решение.

а) Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

б) Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE:EA_1 = 1:2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 2$; $AK = 1$;
 $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

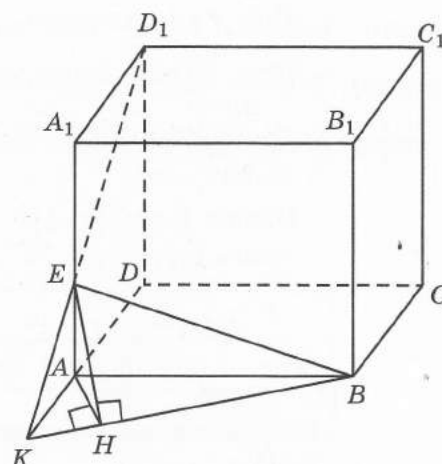
$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left(\sin \angle AHE = \frac{\sqrt{5}}{3}; \cos \angle AHE = \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4}$.

Решение.

Пусть $t = 7^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}; \quad \frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \leq 0,$$

откуда $t < 4$; $7 < t \leq 9$.

При $t < 4$ получим: $7^x < 4$, откуда $x < \log_7 4$.

При $7 < t \leq 9$ получим: $7 < 7^x \leq 9$, откуда $1 < x \leq \log_7 9$.

Решение исходного неравенства: $x < \log_7 4$; $1 < x \leq \log_7 9$.

Ответ: $(-\infty; \log_7 4)$; $(1; \log_7 9]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_7 9$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение.

а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = 2\angle BAO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Поэтому $\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Значит, точки B, E, C и O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25 + 9 + 15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

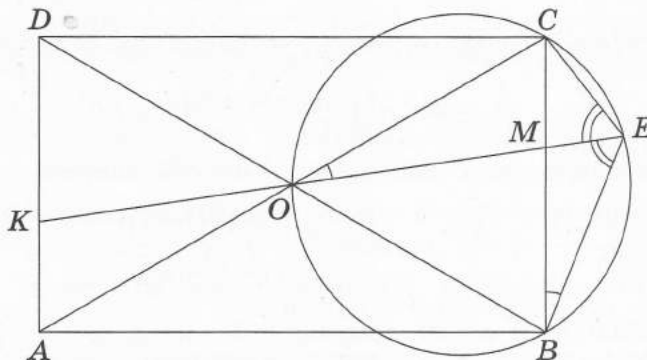
Вписанные углы $BE O$ и $CE O$ опираются на равные хорды BO и CO , значит, EO — биссектриса угла BEC . Пусть M — точка её пересечения со стороной BC . По формуле для биссектрисы треугольника

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cos \frac{1}{2} \angle BEC}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$,

значит, $CM = \frac{3}{8} BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49$. Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.



Ответ: 113.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$.

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1+b+b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X.$$

После четвёртой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1+b+b^2+b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}$.

При $S = 9282000$ и $a = 10$ получаем: $b = 1,1$ и $X = \frac{9282000 \cdot 1,4641 \cdot 0,1}{0,4641} = 2928200$ (рублей).

Ответ: 2 928 200 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено, ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{7}{x} - 4 \right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - 3$ и $g(x) = \left| \frac{7}{x} - 4 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0; \frac{7}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на проме-

жутке $\left(0; \frac{7}{4}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{7}{4}\right) \geq g\left(\frac{7}{4}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{7}{4} - 3 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{12}{7}$.

На промежутке $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - 3 = 4 - \frac{7}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 7x + 7 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения

$D = 49 - 28a$, поэтому при $a > \frac{7}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{7}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{7}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{7}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{7 + \sqrt{D}}{2a} > \frac{7}{2a} > 2 > \frac{7}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $a\left(x_1 - \frac{7}{4}\right)\left(x_2 - \frac{7}{4}\right) = a\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 7 = \frac{7 \cdot (7a - 12)}{16} > 0$, то есть $a > \frac{12}{7}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{7}{x} - 4\right| = ax - 3$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{12}{7}$ и $a > \frac{7}{4}$;
- два корня при $a = \frac{12}{7}$ и $a = \frac{7}{4}$;
- три корня при $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Ответ: $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино

мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 9 или больше. Тогда девочек было 7 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 4 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}$, что больше $\frac{3}{10}$. Аналогично, кино посетило не более 5 мальчиков, поскольку $\frac{6}{6+7} = \frac{6}{13} > \frac{5}{12}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 8.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{3}{10}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{5}{12}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{3}{7}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{7}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{8}{7}$,

поэтому доля девочек в группе: $\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{8}{7}+1} = \frac{7}{15}$.

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 7 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{7}{15}$.

Ответ: а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 17

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0$. Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x} = -2$ или $\frac{1}{\sin x} = 1$. Значит, $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; либо $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$: $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 и D_1 .
 б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1 .

Решение.

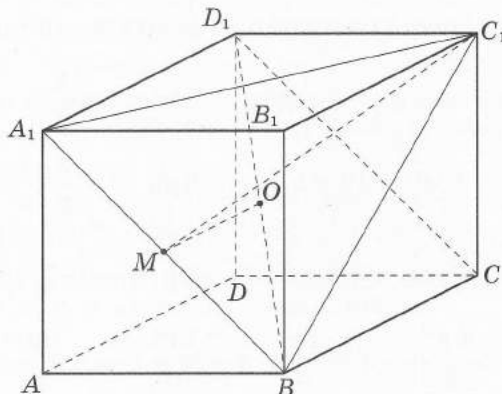
а) Так как BC параллельно A_1D_1 , то точка C лежит в плоскости BA_1D_1 . Прямоугольник BCD_1A_1 — искомое сечение.

б) Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B .

$A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1 , поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1 .

Предположим, что сторона куба равна 1. Найдём стороны треугольника OMC_1 . Из треугольника BA_1D_1 находим $OM = \frac{1}{2}$; из треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ поскольку } O \text{ — середина диагонали } AC_1.$$



Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos \angle OMC_1 = \frac{OM^2 + C_1M^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте <i>a</i> и обоснованно найден верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Выполнено верное построение в пункте <i>a</i> , ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

Решение.

Воспользуемся тождеством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Для доказательства этого тождества достаточно рассмотреть разность логарифмов левой и правой части:

$$\log_b a^{\log_b c} - \log_b c^{\log_b a} = \log_b c \cdot \log_b a - \log_b a \cdot \log_b c = 0.$$

Значит, $|x|^{\log_2 9} = |x|^{2\log_2 3} = (x^2)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x^2}$. Неравенство принимает вид

$$3 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot 3^{\log_2(2x+3)}; \quad 3^{\log_2 x^2} \leq 3^{\log_2(2x+3)}; \quad \log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3); \quad \begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0; \end{cases}$$

$-1 \leq x \leq 3$ при условии $x \neq 0$.

Ответ: $[-1; 0); (0; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AC_1B_1 , если известно, что $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$.

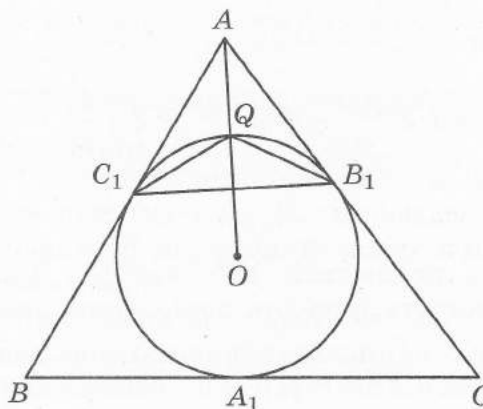
Решение.

а) Поскольку $AC_1 = AB_1$, треугольник AB_1C_1 равнобедренный, биссектриса его угла A перпендикулярна основанию B_1C_1 и делит его пополам, значит, высота треугольника B_1QC_1 , проведённая из вершины Q , является его медианой. Значит, треугольник B_1QC_1 равнобедренный, $\angle QB_1C_1 = \angle QC_1B_1$.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle AC_1B_1 = 2\angle QB_1C_1 = 2\angle QC_1B_1.$$

Следовательно, C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .



б) Поскольку Q — точка пересечения биссектрис треугольника AB_1C_1 , эта точка — центр окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 . Значит, искомое расстояние — это длина отрезка OQ , т.е. радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Пусть этот радиус равен r , а полупериметр треугольника ABC равен p . Тогда

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21,$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Следовательно,

$$OQ = r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{84}{21} = 4.$$

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Окончание таблицы

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17

31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй — 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , годовые составляют $a\%$, первая выплата X , а вторая Y . Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - Y = (Sb - X)b - Y = Sb^2 - bX - Y.$$

По условию двумя выплатами Арсений должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - bX - Y = 0$, откуда $D = X^2 + 4SY = 10^8 \cdot 169^2$, значит,

$$b = \frac{X + \sqrt{D}}{2S} = \frac{10^4 \cdot 55 + 10^4 \cdot 169}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 1,12, \text{ откуда } a = (b - 1) \cdot 100 = 12.$$

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца, ИЛИ имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

При $x \geq a^2$ $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому график функции есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$.

При $x \leq a^2$ $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.

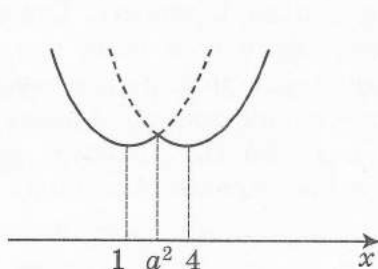


Рис. 1

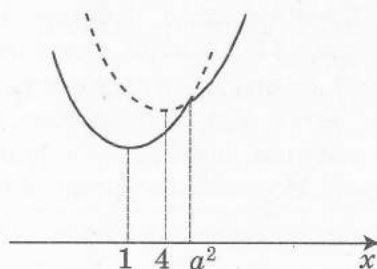


Рис. 2

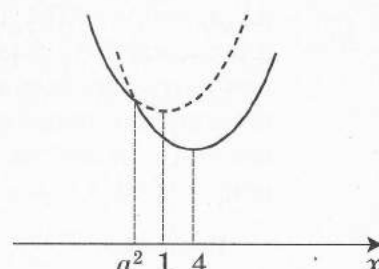


Рис. 3

Обе параболы проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $1 < a^2 < 4$, откуда $1 < |a| < 2$.

Ответ: $-2 < a < -1; 1 < a < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр, либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

- а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
- б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?
- в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Решение:

а) Каждый сотрудник должен получить 15 000 рублей. Выдадим 33 сотрудникам по 3 пятитысячных купюры, одному — пятитысячную и 10 тысячных, шестерым — по 15 тысячных.

б) Каждый сотрудник, кроме ведущего специалиста, должен получить 8000 рублей, поэтому нужно будет выдать каждому не менее трёх тысячных купюр, значит, всего их нужно не менее 210 штук. Следовательно, без сдачи и размена выдать премии не удастся.

в) Если сотрудников 27 или больше, то распределим премии так: 26 человек должны получить по 4 тысячи, один — всё остальное, остальные — ничего. Тогда выдать премии будет нельзя по тем же причинам, что и в пункте «б».

Если же их не больше 26, то выберем всех, кроме одного. Будем выдавать им премии, используя не более 4 тысячных купюр, пока не кончатся пятитысячные.

Если пятитысячные купюры закончились, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы, а последний просто заберёт все оставшиеся деньги.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Вариант 22

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Обозначив $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = t$, получаем:

$$t^2 - 2t - 3 = 0;$$

$$t = 3 \text{ или } t = -1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \text{ или } \operatorname{tg} x = -1.$$

Следовательно, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) На отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ лежат корни $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi, \frac{11\pi}{4}, \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 3\pi$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi; \frac{11\pi}{4}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 3\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A, B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A, B и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

Решение.

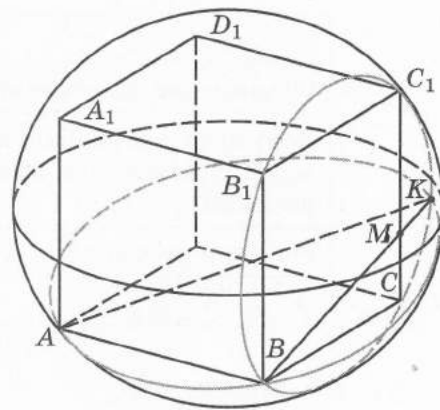
а) Сечение сферы плоскостью является окружностью. Пусть теперь прямая BM вторично пересекает сферу в точке K . Искомая линия — описанная окружность прямоугольного треугольника ABK .

б) Точка K — точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата BCC_1B_1 . $\angle BKC_1 = 90^\circ$, так как BC_1 — диаметр окружности, поэтому $BK = BC_1 \cdot \cos \angle MBC_1$.

Так как $\angle MBC = 15^\circ$, то $\angle MBC_1 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, откуда $BK = BC_1 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Так как треугольник ABK прямоугольный, то длина описанной вокруг него окружности равна произведению её диаметра AK на число π . Вычисляя $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{4 + 6} = \sqrt{10}$, получаем ответ $\pi\sqrt{10}$.

Ответ: $\pi\sqrt{10}$.



Содержание критерия	Баллы
Выполнено верное построение в пункте а и обоснованно найден верный ответ в пункте б	2
Выполнено верное построение в пункте а, ИЛИ обоснованно найден верный ответ в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}} - 4 \cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 3^{x+\frac{1}{9}}$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 12t + 27 \geq 0; (t-9)(t-3) \geq 0,$$

откуда $t \leq 3$ или $t \geq 9$.

При $t \leq 3$ получим: $3^{x+\frac{1}{9}} \leq 3$, откуда $x \leq \frac{8}{9}$.

При $t \geq 9$ получим: $3^{x+\frac{1}{9}} \geq 9$, откуда $x \geq \frac{17}{9}$.

Решение исходного неравенства: $x \leq \frac{8}{9}$; $x \geq \frac{17}{9}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{8}{9}\right]; \left[\frac{17}{9}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

- 16** Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
 б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

Решение.

а) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 49$, $BC = 34$, AH — высота треугольника, точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно, K — точка пересечения AH и MN , p — полупериметр треугольника ABC . Поскольку MN — средняя линия равнобедренного треугольника, точка K — общая середина MN и AH .

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{49^2 - 17^2} = 8\sqrt{33},$$

значит, $KH = \frac{1}{2}AH = 4\sqrt{33}$.

Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC . Тогда

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{AB + BH} = \frac{17 \cdot 8\sqrt{33}}{49 + 17} = \frac{68\sqrt{33}}{33},$$

а диаметр вписанной окружности равен $2r = \frac{136\sqrt{33}}{33}$. Очевидно, $\frac{136}{33} > 4$, значит $2r = \frac{136\sqrt{33}}{33} > 4\sqrt{33} = KH$.

Следовательно, вписанная окружность пересекает среднюю линию MN треугольника.

б) Пусть вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а средняя линия MN пересекает эту окружность в точках P и Q (P между M и Q).

Тогда

$$AD = p - BC = 66 - 34 = 32, MD = AD - AM = 32 - \frac{49}{2} = \frac{15}{2}.$$

По теореме о касательной и секущей $MD^2 = MP \cdot MQ$, а так как

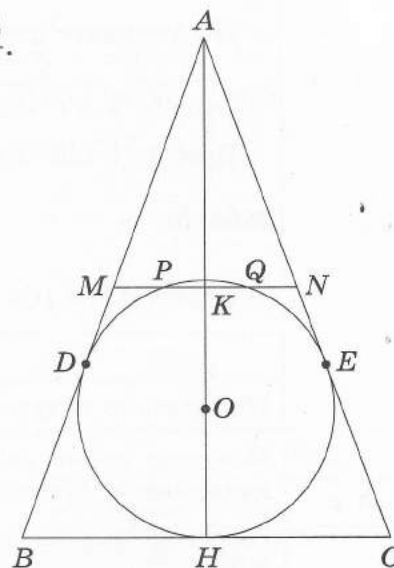
$$MP = NQ = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}(17 - PQ),$$

$$MQ = MP + PQ = \frac{1}{2}(MN + PQ) = \frac{1}{2}(17 + PQ),$$

то $\frac{225}{4} = \frac{1}{4}(17 - PQ)(17 + PQ)$. Отсюда находим, что

$$PQ = 8.$$

Ответ: 8.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 8420 000 рублей в кредит под 10,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

По условию двумя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1+b)X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^2}{b+1}$.

При $S = 8420000$ и $a = 10,5$ получаем: $b = 1,105$ и $X = \frac{8420000 \cdot 1,221025}{2,105} = 4884100$ (рублей).

Ответ: 4 884 100 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено, ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \leq 16$ выполняется для всех значений из отрезка $x \in [-2; 1]$.

Решение.

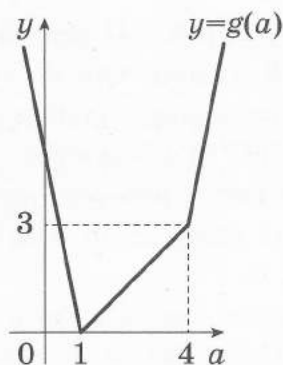
В зависимости от того, как располагается x относительно точек $2 - a$ и $\frac{a - 2}{2}$, модули будут раскрываться по-разному. При этом на каждом участке непрерывная функция $y = 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2|$ будет линейной с угловым коэффициентом $k = 9 \pm 3 \pm 4$. Какова бы ни была комбинация знаков, $k > 0$. Следовательно, функция

$$f(x) = 2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3}$$

монотонно возрастает. К тому же она определена на всей числовой прямой. Поэтому неравенство $f(x) \leq 16$ будет выполнено при всех x на отрезке $[-2; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 16$:

$$2 + 9 + 3|a - 1| + 2|a - 4| - 1 \leq 16; \quad 3|a - 1| + 2|a - 4| - 6 \leq 0.$$

Функция $g(a) = 3|a - 1| + 2|a - 4| - 6$ имеет наименьшее значение в точке $a = 1$, и это значение равно $g(1) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Во всех остальных точках $g(a) > 0$ (см. рисунок). Следовательно, $a = 1$ — единственное значение, при котором выполняется неравенство $f(1) \leq 16$.



Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр, либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

- а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.
- б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?
- в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

Решение.

а) Число $729 = 3^6$ имеет ровно 7 натуральных делителей: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

б) Да. Подходит число $576 = 2^6 \cdot 3^2$. Натуральное число n является делителем 576 тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot 3^m$, где k — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6, а m — одно из чисел 0, 1 или 2. Поэтому всего таких чисел $7 \cdot 3 = 21$.

в) Пусть N — некоторое трёхзначное число, равное произведению n чисел: p_1 в степени k_1 , p_2 в степени k_2 , ..., p_n в степени k_n , где p_1, p_2, \dots, p_n — различные простые числа, а k_1, k_2, \dots, k_n — некоторые натуральные числа. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из решения пункта б), получаем, что у такого

числа N ровно $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$ натуральных делителей (если $n = 1$, то количество делителей равно $k_1 + 1$).

Следовательно, количество натуральных делителей равно 18 тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев: $n = 1$ и $k_1 = 17$; $n = 2$ и набор из чисел k_1, k_2 совпадает с набором из чисел 1, 8; $n = 2$ и набор из чисел k_1, k_2 совпадает с набором из чисел 2, 5; $n = 3$ и набор из чисел k_1, k_2, k_3 совпадает с набором из чисел 1, 2, 2.

В первом случае N имеет вид p^{17} , где p — простое число, что невозможно.

Во втором случае N имеет вид $p \cdot q^8$, где p и q — различные простые числа.

Если $q \geq 3$, то $N \geq 2 \cdot 3^8 > 1000$, что невозможно.

Если $q = 2$, то $N = 256p$, что возможно лишь при $p = 3$. В этом случае возможен 1 вариант.

В третьем случае N имеет вид $p^2 \cdot q^5$, где p и q — различные простые числа. Если $q \geq 5$, то $N \geq 2^2 \cdot 5^5 > 1000$, что невозможно.

Если $q = 3$, то $N = 243p^2$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $0,4... \leq p^2 < 4,1...$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $q = 2$, то $N = 32p^2$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $3,125 \leq p^2 < 31,25$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 5$. В этом случае возможны 3 варианта.

В четвёртом случае N имеет вид $p \cdot q^2 \cdot r^2$, где p, q и r — различные простые числа.

Если $qr \geq 23$, то $N \geq 2 \cdot 23^2 > 1000$, что невозможно. Переберём все натуральные числа не большие 22, которые являются произведением двух различных простых чисел.

Если $qr = 2 \cdot 11 = 22$, то $N = 484p$, что невозможно ($p = 2$ не подходит, так как $q = 2$ или $r = 2$).

Если $qr = 3 \cdot 7 = 21$, то $N = 441p$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $qr = 3 \cdot 5 = 15$, то $N = 225p$, что возможно лишь при $p = 2$.

Если $qr = 2 \cdot 7 = 14$, то $N = 196p$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 5$.

Если $qr = 2 \cdot 5 = 10$, то $N = 100p$, что возможно лишь при $p = 3$ или $p = 7$.

Если $qr = 2 \cdot 3 = 6$, то $N = 36p$. Так как $100 \leq N < 1000$, то $2,7... \leq p < 27,7...$, что возможно лишь при $p = 5, p = 7, p = 11, p = 13, p = 17, p = 19$ или $p = 23$. В этом случае возможны 13 вариантов.

Все случаи разобраны. Следовательно, существует 17 трёхзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей.

Ответ: а) 729; б) да; 576; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены	2

Окончание таблицы

Содержание критерия	Баллы
Приведён пример в пункте <i>a</i> , пункты <i>b</i> и <i>в</i> не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 27

13

а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 7 = 0$.б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 4]$.**Решение.**

а) Сделав замену $y = 2^x$, получим квадратное уравнение $y^2 - 8y + 7 = 0$. Его корни равны 1 и 7. Следовательно, $x = 0$ или $x = \log_2 7$.

б) Понятно, что 0 не лежит на заданном отрезке. Второй корень принадлежит этому отрезку: $1 < \log_2 7 < 4$, так как $2 < 7 < 2^4 = 16$.

Ответ: а) 0; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> , ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта <i>a</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14

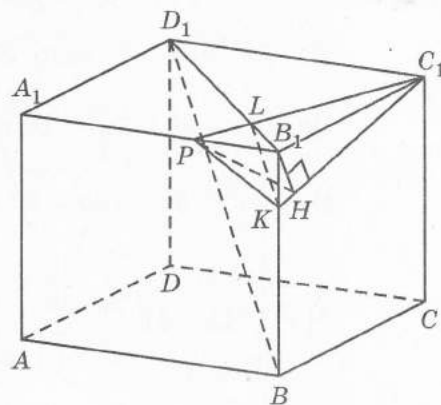
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

Решение.

а) Проведём через точку K прямую, параллельную BD_1 . Пусть эта прямая пересекает плоскость грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ в точке L . Прямая KL лежит в плоскости $BB_1 D_1$, значит, точка L лежит на диагонали $B_1 D_1$. Более того, $B_1 L : LD_1 = B_1 K : KB = 1 : 3$.



Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P , принадлежащей плоскости α . Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P:D_1C_1 = B_1L:D_1L = 1:3$. Значит, $A_1P:PB_1 = 2:1$.

б) Опустим из точки B_1 перпендикуляр B_1H на C_1K . По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый.

Поскольку $A_1P:PB_1 = 2:1$, получаем $PB_1 = \frac{4}{3}$. В прямоугольном треугольнике B_1C_1K :

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle B_1HP = \frac{PB_1}{B_1H} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}(2x^2 - 3x) \geq \log_{\frac{3x-4}{x+1}}(17x - 20 - 3x^2)$.

Решение.

$$\begin{cases} \frac{3x-4}{x+1} > 0, \\ 2x^2 - 3x > 0, \\ 17x - 20 - 3x^2 > 0, \\ (2x^2 - 3x - 17x + 20 + 3x^2) \left(\frac{3x-4}{x+1} - 1 \right)^{-1} \geq 0. \end{cases}$$

Из $2x^2 - 3x > 0$ получаем: $x < 0$ или $x > \frac{3}{2}$.

Из $17x - 20 - 3x^2 > 0$ получаем: $3x^2 - 17x + 20 < 0$, откуда $\frac{5}{3} < x < 4$.

Из $(2x^2 - 3x - 17x + 20 + 3x^2) \left(\frac{3x-4}{x+1} - 1 \right)^{-1} \geq 0$ получаем:

$$5(x^2 - 4x + 4) \left(\frac{2x-5}{x+1} \right)^{-1} \geq 0; \quad \begin{cases} \frac{(x-2)^2(x+1)}{2x-5} \geq 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$$

$$x = 2, \text{ или } x < -1, \text{ или } x > \frac{5}{2}.$$

Следовательно, $x = 2$ или $\frac{5}{2} < x < 4$.

Ответ: $2; \left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16

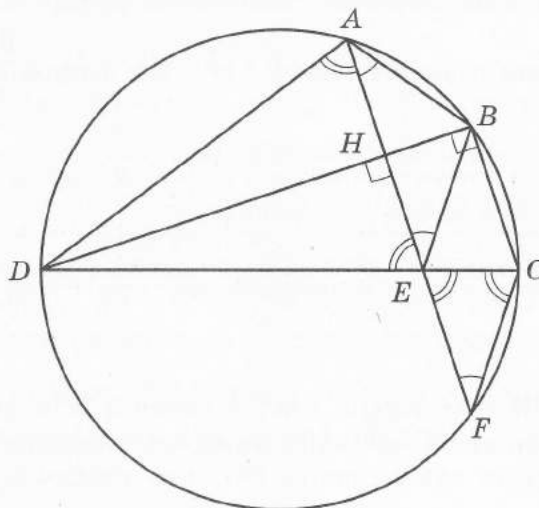
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.

Решение.

а) Точка B лежит на окружности с диаметром CD , поэтому $BC \perp BD$, а т.к. $AF \perp BD$, то $BC \parallel AF$. Трапеция $ABCF$ вписана в окружность, значит, она равнобедренная, $CF = AB$. Высота BH треугольника ABE является его медианой, значит, треугольник ABE равнобедренный, поэтому $BE = AB = CF$, а т.к. $\angle BEA = \angle BAE = \angle CFE$, то $CF \parallel BE$. Противоположные стороны BE и CF четырёхугольника $BCFE$ равны и параллельны, значит, это параллелограмм.



б) Треугольник ADE равнобедренный, т.к. его высота DH является медианой, значит, $\angle CEF = \angle AED = \angle DAE$, а т.к. вписанные углы DCF и DAF опираются на одну и ту же дугу, то

$$\angle ECF = \angle DCF = \angle DAF = \angle DAE = \angle CEF.$$

Следовательно, треугольник CEF равнобедренный, $EF = CF = AB = 5$.

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что $BH = 3$, значит, высота параллелограмма $BCFE$ (даже ромба), опущенная из вершины E на сторону BC , равна 3.

По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд $DH \cdot BH = AH \cdot HF$, откуда

$$DH = \frac{AH \cdot HF}{BH} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12, \quad BD = BH + DH = 3 + 12 = 15.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABED} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} AE \cdot BD + \frac{1}{2} EF \cdot BH = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 60 + \frac{15}{2} = \frac{135}{2} = 67,5. \end{aligned}$$

Ответ: 67,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17

31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое коли-

чество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй — 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , годовые составляют $a\%$, первая выплата X , а вторая Y . Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - Y = (Sb - X)b - Y = Sb^2 - bX - Y.$$

По условию двумя выплатами Антон должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - bX - Y = 0$, откуда $D = X^2 + 4SY = 10^8 \cdot 169^2$, значит,

$$b = \frac{X + \sqrt{D}}{2S} = \frac{10^4 \cdot 51 + 10^4 \cdot 169}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 1,1, \text{ откуда } a = (b - 1) \cdot 100 = 10.$$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца, или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найти все значения параметра a , при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| \leq 16.$$

Решение.

Сделаем замену $x = \sin u$. Очевидно, $-1 \leq x \leq 1$. Получаем неравенство:

$$13x - 7|x + v - 2a| + 3|x - 2v - a - 1| \leq 16.$$

При фиксированных v и a рассмотрим левую часть как функцию от x :

$$f(x) = 13x - 7|x + v - 2a| + 3|x - 2v - a - 1|.$$

В зависимости от того, как располагается x относительно точек $2a - v$ и $2v + a + 1$, модули будут раскрываться по-разному. При этом на каждом участке непрерывная функция $f(x)$ будет линейной с угловым коэффициентом $k = 13 \pm 7 \pm 3$. Какова бы ни была комбинация знаков, $k > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает.

Поэтому неравенство $f(x) \leq 16$ выполняется при всех x от -1 до 1 , если и только если $f(1) \leq 16$:

$$13 - 7|v - 2a + 1| + 3|2v + a| \leq 16;$$

$$-7|v - 2a + 1| + 3|2v + a| \leq 3.$$

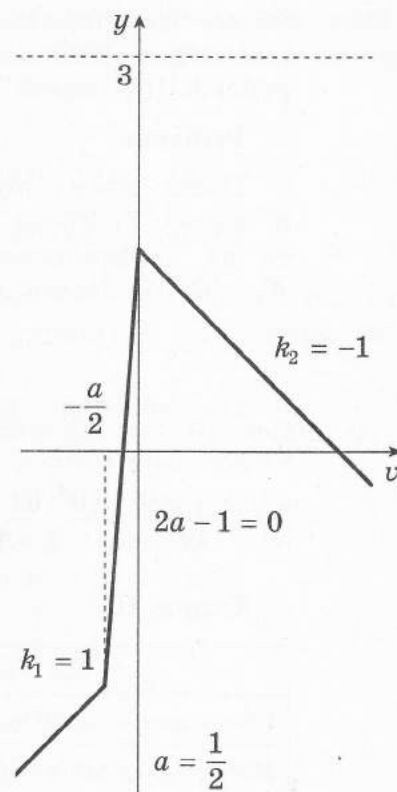
При малых v (меньше, чем наименьшее из чисел $2a - 1$ и $-\frac{a}{2}$) функция $g(v) = -7|v - 2a + 1| + 3|2v + a|$ — возрастающая линейная с угловым коэффициентом $k_1 = 1$. При больших v (больше, чем максимум из тех же чисел) $g(v)$ — убывающая линейная функция с угловым коэффициентом $k_2 = -1$ (см. рисунок). Поэтому функция $g(v)$ принимает наибольшее значение в одной из точек $2a - 1$ или $-\frac{a}{2}$. Неравенство $g(v) \leq 3$ выполняется при всех v тогда и только тогда, когда $g(2a - 1) \leq 3$ и $g(-\frac{a}{2}) \leq 3$. Получаем:

$$\begin{cases} 3|5a - 2| \leq 3, \\ -7\left|\frac{a}{2} + 2a - 1\right| \leq 3. \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех a , а из первого находим:

$$-1 \leq 5a - 2 \leq 1, \text{ откуда } \frac{1}{5} \leq a \leq \frac{3}{5}.$$

Ответ: $[0,2; 0,6]$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр, либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

19

На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
 б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
 в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $14k - 7l + 0 \cdot m = 5(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 7, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 7. По условию $35 < k + l + m < 49$, поэтому $k + l + m = 42$. Таким образом, написано 42 числа.

б) Приведём равенство $14k - 7l = 5(k + l + m)$ к виду $9k = 12l + 5m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $12l \leq 9k$, откуда $l < k$. Следовательно, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в) (оценка) Подставим $k + l + m = 42$ в правую часть равенства

$$14k - 7l = 5(k + l + m); \quad 14k - 7l = 5 \cdot 42,$$

откуда $l = 2k - 30$. Так как $k + l \leq 42$, получаем:

$$3k - 30 \leq 42, \quad 3k \leq 72, \quad k \leq 24,$$

то есть положительных чисел не более 24.

в) (пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 24. Пусть на доске 24 раза написано число 14 и 18 раз написано число -7 . Тогда $\frac{24 \cdot 14 - 18 \cdot 7}{42} = \frac{24 \cdot 2 - 18}{6} = 5$. Указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 42; б) положительных; в) 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

на сторону AO . Тогда

$$OK = \frac{3}{4}AO = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad LK = \frac{1}{4}MO = \frac{1}{4}\sqrt{MA^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg} \angle AOL = \frac{LK}{OK} = \frac{\sqrt{39}}{9}.$$

Ответ: $\arctg \frac{\sqrt{39}}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2$.

Решение.

Разберём два случая: $|x-1| > 1$ и $0 < |x-1| < 1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0 < (x-2)^2 \leq (x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x > 2, \\ 2x-3 \geq 0; \end{cases} \quad x > 2.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ (x-2)^2 \geq (x-1)^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2, \\ 2x-3 \leq 0; \end{cases} \quad 0 < x < 1 \text{ или } 1 < x \leq \frac{3}{2}.$$

Решение неравенства: $0 < x < 1$, $1 < x \leq \frac{3}{2}$ или $x > 2$.

Ответ: $(0; 1); \left(1; \frac{3}{2}\right]; (2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

16 Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 6 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

Решение.

а) Пусть вписанная окружность с центром O касается боковой стороны AB и основания BC равнобедренного треугольника ABC в точках M и H , а окружность с центром O_1 касается боковой стороны AB , продолжения основания BC в точке D и продолжения боковой стороны AC в точке E . Тогда AH — высота треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_1 — биссектриса угла BAE . В четырёхугольнике $AHDO_1$ угол HAO_1 — прямой как угол между биссектрисами смежных углов BAC и BAE , а так как $\angle HDO_1 = \angle AHD = 90^\circ$, то $AHDO_1$ — прямоугольник, поэтому $O_1D = AH$.

б) Пусть радиус окружности с центром O равен r . Тогда радиус окружности с центром O_1 равен $6r$.

$$AH = O_1D = 6r, OA = AH - OH = 6r - r = 5r.$$

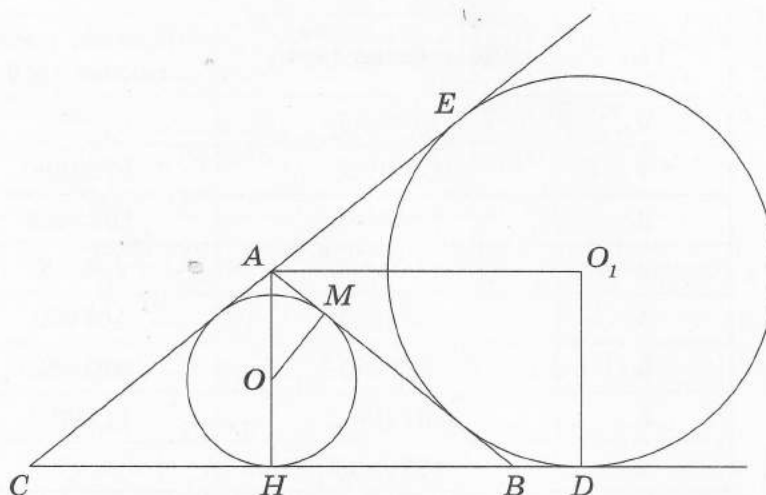
Из прямоугольного треугольника AOM находим, что

$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{25r^2 - r^2} = 2r\sqrt{6}.$$

Прямоугольные треугольники AOM и ABH подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{AM}{OM} = \frac{AH}{BH}, \text{ откуда } BH = \frac{OM \cdot AH}{AM} = \frac{r \cdot 6r}{2r\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6}}{2}.$$

По теореме об отрезках касательных, проведённых к окружности из одной точки, $BM = BH = \frac{r\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $\frac{BM}{AM} = \frac{\frac{r\sqrt{6}}{2}}{2r\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$.



Ответ: 1:4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17

Матвей хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Матвей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тыс. рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$.

Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1 400 000	—
1	1 540 000	1 220 000
2	1 342 000	1 022 000
3	1 124 200	804 200
4	884 620	564 620
5	621 082	301 082
6	331 190,2	11 190,2
7	12 309,22	0

Значит, Матвей погасит кредит за 7 лет.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Найден верный алгоритм вычисления оставшейся суммы долга, но решение не доведено до конца или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{3x+3-2ax}{x^2+2(2a+1)x+4a^2+4a+2}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y = \frac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1}$.

Отрезок $[0; 1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\frac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1} = 0$ и $\frac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1} = 1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(2a-3)x=3$ имеет решение при любом $a \neq 1,5$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+(6a-1)x+4a^2+4a-1=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$$D = (6a - 1)^2 - 4(4a^2 + 4a - 1) \geq 0; \quad 20a^2 - 28a + 5 \geq 0;$$

$$\left(a - \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right) \left(a - \frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}\right) \geq 0,$$

откуда $a \in \left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right]$ или $a \in \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; +\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a \in \left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right] \cup \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; 1,5\right) \cup (1,5; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}\right]; \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; 1,5\right); (1,5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получено множество значений a , отличающееся от искомого исключением точек $a = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}$ и/или $a = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}$	3
Получено множество значений a , отличающееся от искомого включением точки $a = 1,5$, возможно, с исключением точек $a = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10}$ и/или $a = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}$; ИЛИ при обоснованном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

- Приведите пример числа-палиндroma, которое делится на 45.
- Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45?
- Найдите десятое по величине число-палиндром, которое делится на 45.

Решение.

- Например, число $585 = 13 \cdot 45$.
- Пусть десятичная запись пятизначного числа n имеет вид $abcba$, где a , b и c — некоторые цифры, $a \neq 0$. Это число делится на 45 тогда и только тогда,

когда оно делится на 5 и на 9. По признакам делимости на 5 и на 9 получаем, что этому условию удовлетворяют те и только те числа n , для которых a равно 5 и $2a + 2b + c$ делится на 9. Значит, $2b + c$ должно давать остаток 8 при делении на 9. Следовательно, $2b + c$ может равняться 8, 17 или 26.

Если $2b + c = 8$, то $b = 0$, $c = 8$, или $b = 1$, $c = 6$, или $b = 2$, $c = 4$, или $b = 3$, $c = 2$, или $b = 4$, $c = 0$ — всего 5 вариантов.

Если $2b + c = 17$, то $b = 4$, $c = 9$, или $b = 5$, $c = 7$, или $b = 6$, $c = 5$, или $b = 7$, $c = 3$, или $b = 8$, $c = 1$ — всего 5 вариантов.

Если $2b + c = 26$, то $b = 9$, $c = 8$ — всего 1 вариант.

Значит, всего существует 11 пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 45.

в) Заметим, что делящихся на 45 двузначных и однозначных чисел-палиндромов не существует. Если трёхзначное число-палиндром имеет десятичную запись aba и делится на 45, то $a = 5$ и $2a + b$ делится на 9. Значит, b при делении на 9 даёт в остатке 8. Есть всего один вариант — число 585.

Если четырёхзначное число имеет десятичную запись $abba$ и делится на 45, то $a = 5$ и $2a + 2b$ делится на 9. Тогда $5 + b$ делится на 9. Есть всего один вариант — число 5445.

Как доказано в решении пункта б, существует 11 пятизначных чисел-палиндромов с десятичной записью $abcba$, делящихся на 45. У всех этих чисел $a = 5$. У самого большого из них $b = 9$, $c = 8$ — это тринадцатое по величине число-палиндром, делящееся на 45. Случаям $b = 8$, $c = 1$; $b = 7$, $c = 3$ соответствуют 12-е и 11-е по величине числа соответственно. Десятым, по величине делящимся на 45, числом-палиндромом является число 56565.

Ответ: а) 585; б) 11; в) 56565.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4