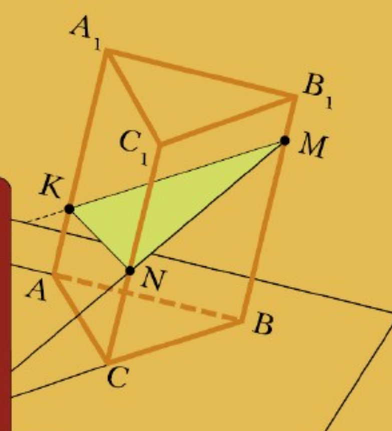
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

10 класс

Геометрия



Базовый уровень

вентана граф

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10 класс

Базовый уровень

Учебное пособие

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

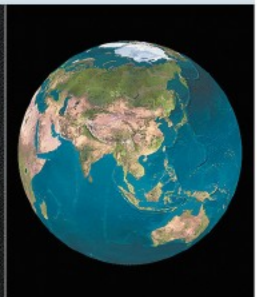
Дорогие друзья!

В 9 классе вы завершили изучение курса планиметрии – раздела геометрии, рассматривающего плоские фигуры и их свойства. Однако большинство окружающих нас объектов, созданных как человеком (рис. 1), так и самой природой (рис. 2), не являются плоскими.

Рис. 1

		
Царь-колокол (Московский Кремль)	Собор Василия Блаженного (Москва)	Старинный город инков Мачу Пикчу (Перу)

Рис. 2

			
Сталактиты и сталагмиты	Отложения серы у фумарол	Кристаллы	Планета Земля

Раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве и их свойства, называют ***стереометрией***.

Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «*стереос*» – объёмный, пространственный и «*метрео*» – измерять.

Вы приступаете к изучению стереометрии.

Знать стереометрию чрезвычайно важно. Без пространственного воображения и глубоких геометрических знаний невозможно стать хорошим инженером, модельером, строителем, архитектором, специалистом в области компьютерной графики и т. д. И это понятно, ведь стереометрия исследует математические модели тех материальных объектов, с которыми ежедневно имеют дело люди. Вообще стереометрия является одним из основных инструментов познания окружающего мира.

Кроме того, стереометрия – красивый и интересный школьный предмет, развивающий логическое и абстрактное мышление, пространственное воображение, внимание и аккуратность. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет в этом учебник, который вы держите в руках.

Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал; самые важные сведения выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем только после изучения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности, так и сложные и высокой сложности.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✹ Задачи высокой сложности

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◀ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

531 Задания, рекомендуемые для домашней работы

423 Задания, рекомендуемые для устной работы

Глава 1. Введение в стереометрию

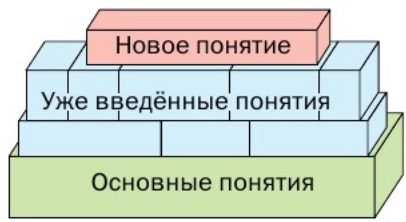
В этой главе вы ознакомитесь с основными понятиями стереометрии, аксиомами стереометрии и основными следствиями из них, получите первоначальные представления о многогранниках.

§ 1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии

Изучая математику, вы со многими понятиями знакомились с помощью определений. Так, из курса планиметрии вам хорошо знакомы определения четырёхугольника, трапеции, окружности и т. п.

Определение любого понятия основано на других понятиях, содержание которых вам уже известно. Например, рассмотрим определение трапеции: «Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны». Видим, что определение трапеции основано на таких уже введённых понятиях, как четырёхугольник, сторона четырёхугольника, параллельные и непараллельные стороны и т. д. Итак, определения вводятся по принципу «новое основано на старом». Тогда ясно, что должны существовать первоначальные понятия, которым определений не дают. Их называют **основными понятиями** (рис. 1.1).

Рис. 1.1



В изученном вами курсе планиметрии не давали определения таким фигурам, как точка и прямая. В стереометрии, помимо них, к основным понятиям отнесём ещё одну фигуру – **плоскость**.

Наглядное представление о плоскости дают поверхность водоёма в безветренную погоду, поверхность зеркала, поверхность отполированного стола, мысленно продолженные во всех направлениях.

В планиметрии мы рассматривали только одну плоскость, и все изучаемые фигуры принадлежали этой плоскости. В стереометрии же рассматривают бесконечно много плоскостей, расположенных в *пространстве*.

Как правило, плоскости обозначают строчными греческими буквами: α, β, γ, ... На рисунках плоскости изображают в виде параллелограмма (рис. 1.2) или в виде других ограниченных частей плоскости (рис. 1.3).

Плоскость, так же как и прямая, состоит из точек, т. е. плоскость – это множество точек.

Существует несколько случаев взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве. Приведём примеры.

На рисунке 1.4 изображена точка A, принадлежащая плоскости α. Также говорят, что точка A лежит в плоскости α или что плоскость α проходит через точку A. Коротко это можно записать так: $A \in \alpha$.

Рис. 1.2

Рис. 1.3

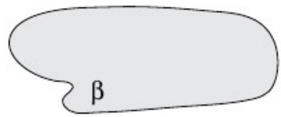


Рис. 1.4

На рисунке 1.5 изображена точка B, не принадлежащая плоскости β. Коротко это можно записать так: $B \notin \beta$.

На рисунке 1.6 изображена **прямая** a, **принадлежащая плоскости** α. Также говорят, что прямая a лежит в плоскости α или что плоскость α проходит через прямую a. Коротко это можно записать так: $a \subset \alpha$.

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что **прямая пересекает плоскость**. На рисунке 1.7 изображена прямая a, пересекающая плоскость α в точке A. Пишут: $a \cap \alpha = A$.

Рис. 1.5

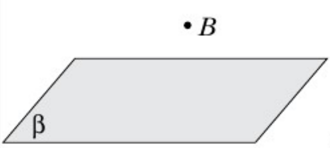


Рис. 1.6

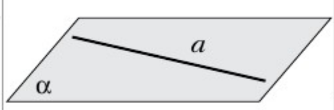
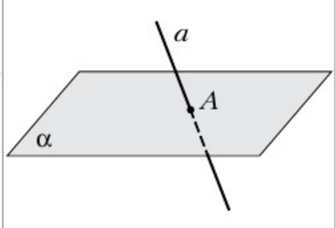


Рис. 1.7

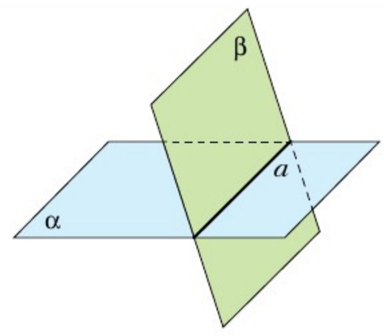


В дальнейшем, говоря «две точки», «три прямые», «две плоскости» и т. п., будем иметь в виду, что это разные точки, разные прямые и разные плоскости.

Если две плоскости имеют общую точку, то говорят, что эти плоскости **пересекаются**.

На рисунке 1.8 изображены пересекающиеся плоскости α и β. Они пересекаются по прямой a. Пишут: $\alpha \cap \beta = a$.

Рис. 1.8



На начальном этапе изучения стереометрии невозможно доказывать теоремы, опираясь на другие утверждения, поскольку этих утверждений ещё нет. Поэтому первые свойства, касающиеся точек, прямых и плоскостей в пространстве, принимают без доказательства и называют **аксиомами**.

Отметим, что ряд аксиом стереометрии по формулировкам дословно совпадают со знакомыми вам аксиомами планиметрии. Например, *какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей; через любые две точки можно провести прямую и притом только одну*.

Мы не будем знакомиться со строгим аксиоматическим построением стереометрии. Рассмотрим лишь некоторые утверждения, выражающие основные свойства плоскостей пространства, опираясь на которые обычно строят курс стереометрии в школе.

Аксиома А1

В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

Если в любой плоскости пространства выполняются аксиомы планиметрии, то выполняются и следствия из этих аксиом, т. е. теоремы планиметрии. Поэтому в стереометрии можно пользоваться всеми известными нам свойствами плоских фигур.

Аксиома А2

Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

Рисунки 1.9–1.11 иллюстрируют эту аксиому.

Из этой аксиомы следует, что три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, определяют единственную плоскость, проходящую через эти точки. Поэтому для обозначения плоскости можно указать какие-нибудь её три точки, не лежащие на одной прямой. Например, на рисунке 1.12 изображены плоскость ABC и принадлежащая ей прямая MN.

Рис. 1.9

Рис. 1.10

Рис. 1.11

Можно записать, что $M \in ABC$ и $MN \subset ABC$.

Аксиома А3

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Например, на рисунке 1.13 точки A, B и C лежат в плоскости ABC. Тогда можно записать: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Рис. 1.12

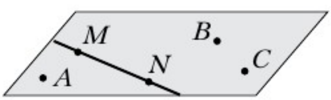
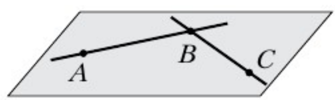


Рис. 1.13



Из этой аксиомы следует, что если прямая не принадлежит плоскости, то она имеет с этой плоскостью не более одной общей точки.

Утверждение, сформулированное в аксиоме А3, часто используют на практике, когда хотят проверить, является ли данная поверхность ровной (плоской). Для этого к поверхности в разных местах прикладывают ровную рейку и проверяют, есть ли зазор между рейкой и поверхностью (рис. 1.14).

Рис. 1.14

Аксиома А4

Если две плоскости имеют общую точку (пересекаются), то они пересекаются по прямой.

Эту аксиому можно проиллюстрировать с помощью согнутого листа бумаги или с помощью вашего учебника (рис. 1.15).

Задача. Докажите, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Решение. Пусть точка A является общей для двух плоскостей α и β, т. е. $A \in \alpha$ и $A \in \beta$ (рис. 1.16). По аксиоме А4 плоскости α и β пересекаются по прямой. Пусть $\alpha \cap \beta = a$. Тогда все общие точки плоскостей α и β принадлежат прямой a. Точка A является общей для плоскостей α и β. Следовательно, $A \in a$. ◄

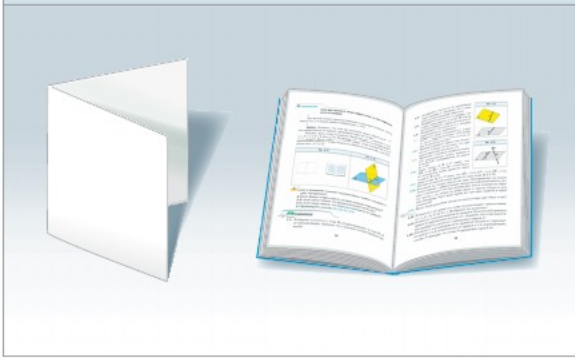


Рис. 1.15

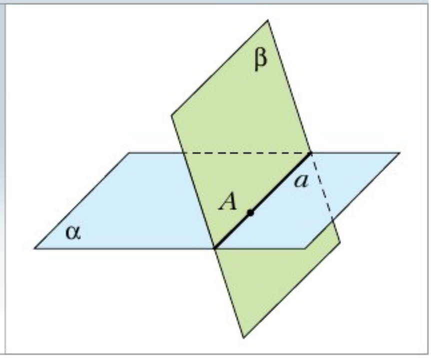


Рис. 1.16

1. Как в математике называют первоначальные понятия, которым не дают определения?
2. Какие фигуры входят в список основных понятий стереометрии?
3. В каком случае говорят, что прямая пересекает плоскость?
4. В каком случае говорят, что плоскости пересекаются?
5. Сформулируйте аксиомы А1, А2, А3, А4.

Упражнения

1.1. Изобразите плоскость α, точку M, ей принадлежащую, и точку K, ей не принадлежащую. Запишите это с помощью соответствующих символов.

1.2. Изобразите плоскость γ, проходящую через прямую c. Запишите это с помощью соответствующих символов.

1.3. Изобразите плоскость α и прямую b, пересекающую данную плоскость в точке A. Запишите это с помощью соответствующих символов. Сколько точек прямой b принадлежит плоскости α?

1.4. Изобразите плоскости β и γ, пересекающиеся по прямой c. Запишите это с помощью соответствующих символов.

1.5. Прямая a проходит через точку A плоскости α. Следует ли из этого, что прямая a пересекает плоскость α?

1.6. Запишите с помощью символов взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, изображённых на рисунке 1.17.

1.7. Даны точки A, B и C, такие, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки A, B и C?

1.8. Даны точки D, E и F, такие, что $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки D, E и F?

1.9. В комнате на люстре сидели три мухи. Одновременно они начали летать: первая – кружить вокруг люстры на одинаковой высоте, вторая – спускаться от люстры вертикально вниз и подниматься обратно, третья – перемещаться от люстры до двери и обратно. Скорость всех мух одинакова. Через какое время все три мухи окажутся в одной плоскости?

1.10. Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку?

1.11. Изобразите плоскости α и β, прямую c, точки A и B, если известно, что $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$, $B \in \alpha$, $B \notin \beta$.

1.12. Изобразите плоскости α, β, γ и прямую m, если известно, что $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = m$.

1.13. Изобразите плоскости α, β, γ и прямые a, b, c, если известно, что $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$.

1.14. Прямая m – линия пересечения плоскостей α и β (рис. 1.18). Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C – плоскости β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и с плоскостью β.

Рис. 1.17

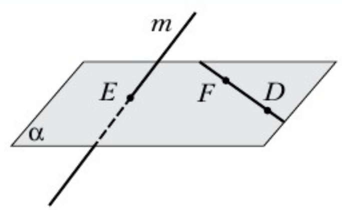
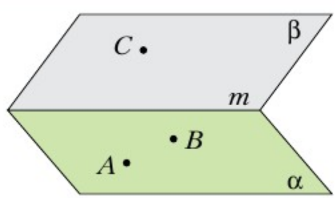
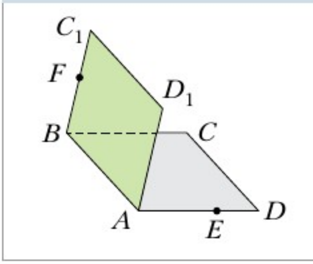


Рис. 1.18



1.15. Квадраты $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости (рис. 1.19). На отрезке AD отметили точку E, а на отрезке BC_1 – точку F. Постройте точку пересечения:
1) прямой CE с плоскостью ABC_1;
2) прямой FD_1 с плоскостью ABC.

Рис. 1.19



1.16. Верно ли утверждение: любая прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?

1.17. О плоскостях α и β и прямой a известно, что $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = M$. Докажите, что $a \cap c = M$.

1.18. О плоскостях α и β и прямой a известно, что $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap c = A$. Докажите, что $A \in \beta$.

1.19. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что никакие три из них не лежат на одной прямой.

1.20. Докажите, что если две соседние вершины четырёхугольника и точка пересечения его диагоналей принадлежат одной плоскости, то и две другие вершины принадлежат этой плоскости.

1.21. Вершина D четырёхугольника $ABCD$ принадлежит плоскости α, а остальные вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения сторон BA и BC пересекают плоскость α в точках M и K соответственно. Докажите, что точки M, D и K лежат на одной прямой.

1.22. Вершина A треугольника ABC принадлежит плоскости α, а вершины B и C лежат вне этой плоскости. Продолжения медиан BM и CN треугольника ABC пересекают плоскость α в точках K и E соответственно. Докажите, что точки A, K и E лежат на одной прямой.

1.23. О плоскостях α, β и γ известно, что $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $a \cap c = M$. Докажите, что $M \in b$.

1.24. Точка M – общая точка двух плоскостей ABC и BCD. Найдите отрезок BC, если $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

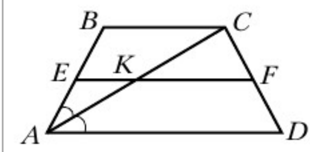
1.25. Пять точек, являющиеся серединами звеньев замкнутой ломаной $ABCDE$, принадлежат плоскости α. Докажите, что точки A, B, C, D и E принадлежат этой же плоскости.

Упражнения для повторения

1.26. На высоте BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили точку M. Найдите отношение площади треугольника AMC к площади треугольника ABC, если $BD = 12$ см, $BM = 8$ см.

1.27. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) делит угол BAD пополам (рис. 1.20). Точка E – середина отрезка AB. Прямая, проходящая через точку E параллельно основаниям трапеции, пересекает отрезок AC в точке K, а отрезок CD – в точке F. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если $EK = 3$ см, $KF = 5$ см.

Рис. 1.20



§ 2. Следствия из аксиом стереометрии

В предыдущем параграфе вы ознакомились с некоторыми аксиомами стереометрии. Кроме аксиом, есть и другие наглядно очевидные свойства, описывающие взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве. Теперь, опираясь на аксиомы, эти свойства можно доказать.

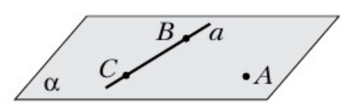
Теорема 2.1

Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство

Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A (рис. 2.1). Докажем, что через прямую a и точку A проходит плоскость.

Рис. 2.1



Отметим на прямой a две произвольные точки B и C. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда по аксиоме **А2** через точки A, B и C проходит некоторая плоскость α. Две точки B и C прямой a принадлежат плоскости α. Тогда по аксиоме **А3** плоскости α принадлежит и прямая a. Итак, через прямую a и точку A проходит плоскость α.

Докажем, что α – единственная плоскость, проходящая через прямую a и точку A. Предположим, что существует ещё одна плоскость β, такая, что $a \subset \beta$ и $A \in \beta$. Плоскость β проходит через точки A, B и C. Таким образом, через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, проходят две плоскости α и β, что противоречит аксиоме **А2**. Следовательно, наше предположение неверно, и плоскость α является единственной плоскостью, проходящей через прямую a и точку A. ◄

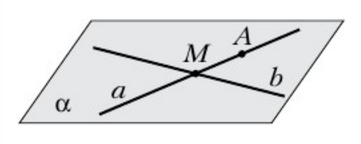
Теорема 2.2

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство

Пусть даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 2.2). Докажем, что через прямые a и b проходит плоскость.

Рис. 2.2



Отметим на прямой a точку A, отличную от точки M. Точка A не принадлежит прямой b, так как у прямых a и b только одна общая точка M. Тогда по теореме 2.1 через точку A и прямую b проходит некоторая плоскость α. Две точки M и A прямой a принадлежат плоскости α. Тогда по аксиоме А3 прямая a также принадлежит плоскости α. Итак, через прямые a и b проходит плоскость α.

Докажем, что α – единственная плоскость, проходящая через прямые a и b. Предположим, что существует ещё одна плоскость β, такая, что $a \subset \beta$ и $b \subset \beta$. Плоскость β проходит через прямую b и точку A. Таким образом, через прямую b и не лежащую на ней точку A проходят две плоскости α и β, что противоречит теореме 2.1. Следовательно, наше предположение неверно, и плоскость α является единственной плоскостью, проходящей через прямые a и b. ◂

Из аксиомы А2 и теорем 2.1 и 2.2 следует, что *плоскость однозначно определяется*:

1) *тремя точками, не лежащими на одной прямой*;
2) *прямой и не лежащей на ней точкой*;
3) *двумя пересекающимися прямыми*.

Таким образом, мы указали три способа задания плоскости.

1. Какие следствия из аксиом стереометрии вы знаете?
2. Укажите способы однозначного задания плоскости.

Упражнения

2.1. Сколько плоскостей можно провести через данные прямую и точку?

2.2. Докажите, что через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести плоскость. Сколько можно провести таких плоскостей?

2.3. Прямые AB и CD пересекаются. Докажите, что прямые AC и BD лежат в одной плоскости.

2.4. Центр O и хорда AB окружности лежат в некоторой плоскости. Лежит ли в этой плоскости любая точка данной окружности?

2.5. Сторона AC и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат в плоскости α. Лежит ли в этой плоскости вершина B?

2.6. Прямые a и b пересекаются. Все ли прямые, пересекающие прямые a и b, лежат в одной плоскости?

2.7. Даны прямая a и точка A вне её. Докажите, что все прямые, которые проходят через точку A и пересекают прямую a, лежат в одной плоскости.

2.8. Прямые m и n пересекаются в точке A. Точка B принадлежит прямой m, точка C – прямой n, точка D – прямой BC. Докажите, что прямые m и n и точка D лежат в одной плоскости.

2.9. Прямые AB и AC пересекают плоскость α в точках B и C, точки D и E принадлежат этой плоскости (рис. 2.3). Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC.

2.10. Прямая BA пересекает плоскость α в точке A, прямая BC – в точке C (рис. 2.4). На отрезке AB отметили точку D, на отрезке BC – точку E. Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью α.

2.11. Даны пять точек, не лежащих в одной плоскости. Какое наибольшее количество из них может лежать на одной прямой?

2.12. Три прямые пересекаются в одной точке. Через каждые две из этих прямых проведена плоскость. Сколько всего плоскостей проведено?

2.13. Как при помощи двух нитей столяр может проверить, лежат ли концы четырёх ножек стула в одной плоскости?

2.14. Найдите ошибку на рисунке 2.5, если известно, что вершина D четырёхугольника $ABCD$ лежит в плоскости α, вершины A, B и C не лежат в этой плоскости, прямая AB пересекает плоскость α в точке E, прямая BC – в точке F. Выполните правильный рисунок.

Рис. 2.3

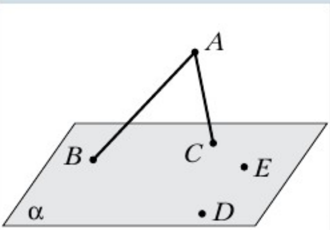


Рис. 2.4

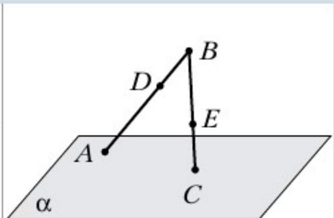
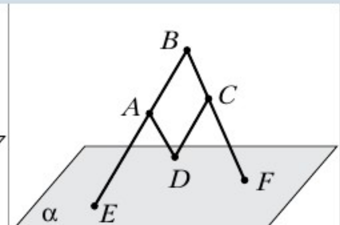


Рис. 2.5



2.15. Найдите ошибку на рисунке 2.6, если известно, что прямые BP и CK пересекаются в точке E, прямая BP пересекает прямую AC в точке B, прямую FM – в точке P, прямая CK пересекает прямую FM в точке K, прямые AC, FE и FM пересекают плоскость α в точках A, D и M соответственно. Выполните правильный рисунок.

2.16. Точка C лежит на прямой AB, а точка D не лежит на этой прямой. Точка E лежит на прямой AD. Докажите, что плоскости ABD и CDE совпадают.

2.17. Прямые a, b и c попарно пересекаются, причём точки их пересечения не совпадают. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?

2.18. На рисунке 2.7 буквами P, E и Q обозначены точки пересечения прямых MK и BC, MN и CA, KN и AB соответственно. Верно ли, что плоскости ABC и MNK совпадают?

Рис. 2.6

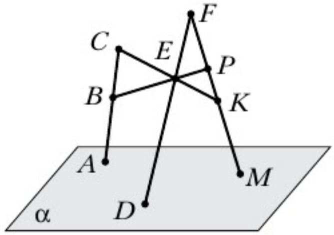
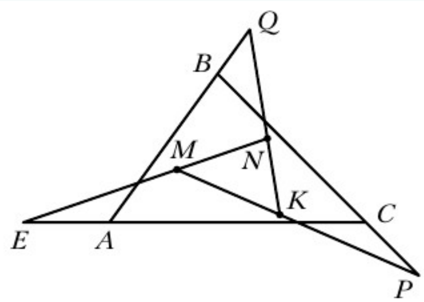


Рис. 2.7



Упражнения для повторения

2.19. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отметили точку M. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника AMD равна 16 см^2.

2.20. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC параллельны. Найдите отрезок BE, если $AE = 10$ см, $CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

§ 3. Пространственные фигуры. Начальные представления о многогранниках

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают пространственные фигуры, т. е. фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Некоторые из пространственных фигур вам уже знакомы.

Так, на рисунке 3.1 изображены цилиндр, конус и шар. Эти фигуры вы будете подробно изучать в 11 классе.

На рисунке 3.2 изображена ещё одна знакомая вам пространственная фигура – пирамида. Эта фигура является частным видом **многогранника**.

Рис. 3.1

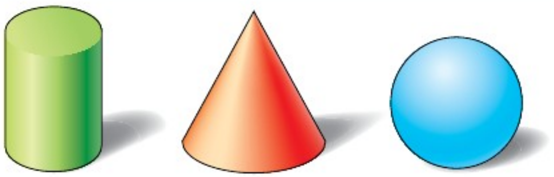
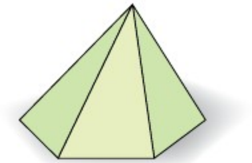
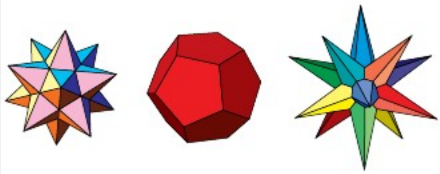


Рис. 3.2



Примеры многогранников показаны на рисунке 3.3.

Рис. 3.3



Поверхность многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **рёбрами многогранника**, а вершины – **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

На рисунке 3.5 изображена пятиугольная пирамида $FABCDE$. Поверхность этого многогранника состоит из пяти треугольников, которые называют **боковыми гранями пирамиды**, и одного пятиугольника, который называют **основанием пирамиды**. Вершину F, которая является общей для всех боковых граней, называют **вершиной пирамиды**. Рёбра FA, FB, FC, FD и FE называют **боковыми рёбрами пирамиды**, а рёбра AB, BC, CD, DE и EA – **рёбрами основания пирамиды**.

Рис. 3.4

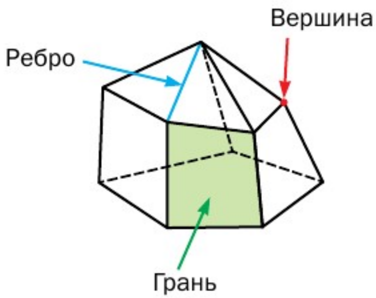
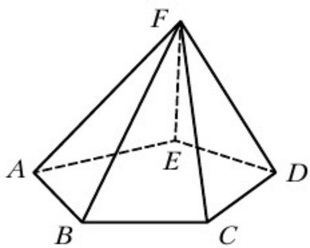


Рис. 3.5



На рисунке 3.6 изображена треугольная пирамида $DABC$. Треугольную пирамиду также называют **тетраэдром**.

Ещё одним частным видом многогранника является **призма**. На рисунке 3.7 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Этот многогранник имеет пять граней, две из которых – равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Их называют **основаниями призмы**. Остальные грани призмы – параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы**. Рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 называют **боковыми рёбрами призмы**.

На рисунке 3.8 изображена четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её поверхность состоит из двух равных четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (основания призмы) и четырёх параллелограммов (боковые грани призмы).

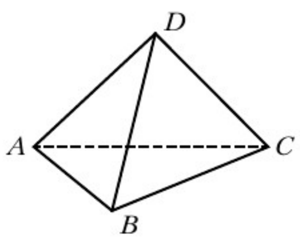


Рис. 3.6

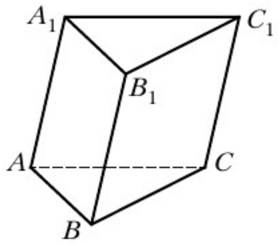


Рис. 3.7

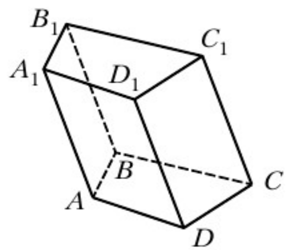


Рис. 3.8

Вы также знакомы с частным видом четырёхугольной призмы – **прямоугольным параллелепипедом**. На рисунке 3.9 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

В свою очередь, частным видом прямоугольного параллелепипеда является **куб**. Все грани куба – равные квадраты (рис. 3.10).

В главе 4 вы более подробно познакомитесь с многогранниками и их частными видами.

Задача 1. На рёбрах AA_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M и N так, что $AM \neq DN$ (рис. 3.11). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

Решение. Точки M и N принадлежат плоскости AA_1D_1. Тогда по аксиоме **А3** прямая MN принадлежит этой плоскости. Аналогично прямая AD также принадлежит плоскости AA_1D_1. Из планиметрии известно, что прямые, лежащие в одной плоскости, или параллельны, или пересекаются. По-

Рис. 3.9

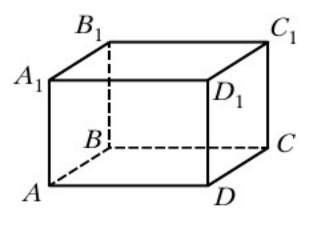


Рис. 3.10

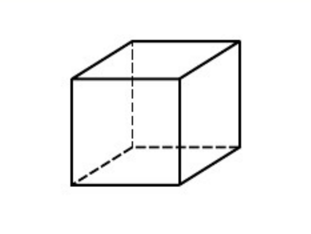
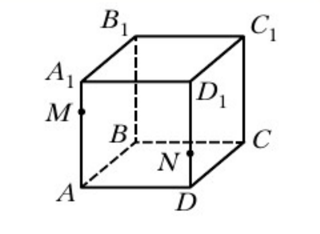


Рис. 3.11



скольку $AM \neq DN$, то прямые AD и MN пересекаются. Пусть X – точка их пересечения (рис. 3.12).

Точки A и D принадлежат плоскости ABC. Тогда по аксиоме **А3** прямая AD принадлежит этой же плоскости. Точка X принадлежит прямой AD. Следовательно, точка X принадлежит плоскости ABC. Поскольку точка X также принадлежит прямой MN, то прямая MN пересекает плоскость ABC в точке X. ◄

Пусть в пространстве заданы многогранник и плоскость.

Если все общие точки многогранника и плоскости образуют многоугольник, то этот многоугольник называют **сечением многогранника плоскостью**, а саму плоскость – **секущей плоскостью**.

На рисунке 3.13 секущую плоскость задают точки A, A_1 и C_1. Сечением призмы этой плоскостью является боковая грань AA_1C_1C.

На рисунке 3.14 секущую плоскость задают прямая AC и точка B_1. Сечением призмы этой плоскостью является треугольник AB_1C.

На рисунке 3.15 секущую плоскость задают две пересекающиеся прямые AE и CE. Сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник AEC.

Рис. 3.12

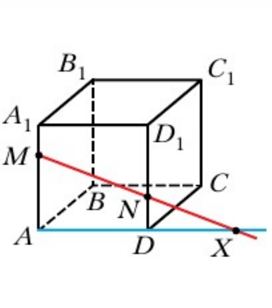


Рис. 3.13

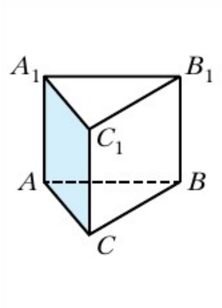


Рис. 3.14

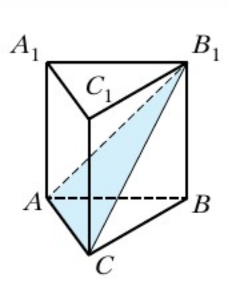
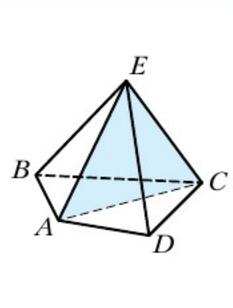


Рис. 3.15



Задача 2. На рёбрах AD, DB и AC тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.16). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN, если отрезок MN не параллелен ребру AB.

Решение. Точки M и N являются общими для плоскости KMN и плоскости ADB. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MN. Тогда секущая плоскость пересекает грань ADB по отрезку MN (рис. 3.17). Аналогично делаем вывод, что плоскость KMN пересекает грань ADC по отрезку KM.

Секущая плоскость KMN и плоскость ABC имеют общую точку K. Следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку K. Чтобы эту прямую построить, надо найти ещё одну общую точку плоскостей ABC и KMN. Для этого найдём, в какой точке прямая MN пересекает плоскость ABC.

Пусть прямая MN пересекает прямую AB в точке X (рис. 3.18). Поскольку $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Поскольку $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Итак, точки K и X являются общими для плоскостей ABC и KMN. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой KX.

Рис. 3.16

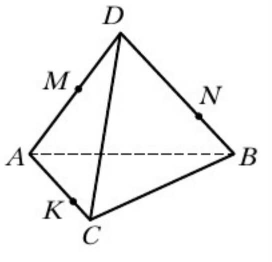


Рис. 3.17

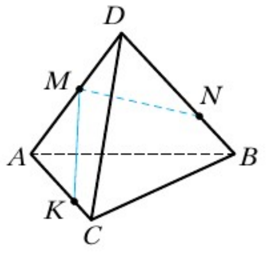
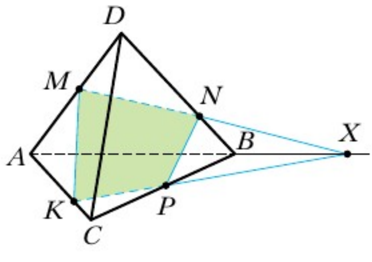


Рис. 3.18



Пусть прямая KX пересекает отрезок CB в точке P. Тогда секущая плоскость пересекает грани ABC и CDB соответственно по отрезкам KP и PN.

Итак, четырёхугольник $KMNP$ – искомое сечение. ◄

Задача 3. Точка M принадлежит боковому ребру BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Прямая a принадлежит плоскости ABC и расположена так, как показано на рисунке 3.19. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую a и точку M.

Решение. Пусть прямая AB пересекает прямую a в точке X (рис. 3.20). Точки M и X являются общими для секущей плоскости и плоскости AA_1B_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MX. Пусть пря-

Рис. 3.19

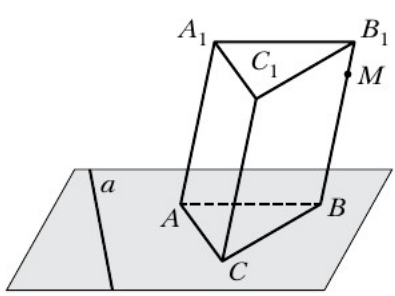
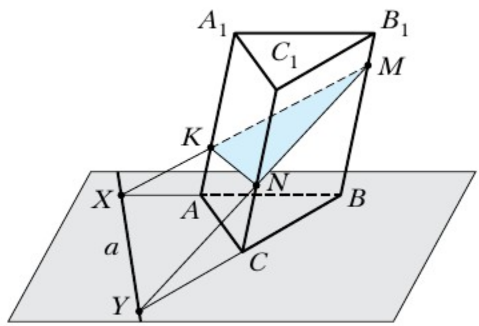


Рис. 3.20



мая MX пересекает ребро AA_1 в точке K. Тогда секущая плоскость пересекает боковую грань AA_1B_1B по отрезку KM.

Аналогично строим отрезок MN, по которому секущая плоскость пересекает грань CC_1B_1B.

Для завершения решения осталось соединить точки N и K. Треугольник KMN – искомое сечение. ◄

1. Назовите пространственные фигуры, которые вы знаете.

2. Из каких фигур состоит поверхность многогранника? Как их называют?

3. Что называют рёбрами многогранника? вершинами многогранника?

4. Какие виды многогранников вы знаете? Опишите эти многогранники.

Упражнения

3.1. На рисунке 3.21 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:

1) основания параллелепипеда;

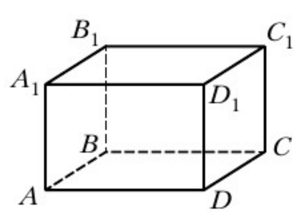
2) боковые грани параллелепипеда;

3) боковые рёбра параллелепипеда;

4) рёбра нижнего основания параллелепипеда;

5) ребро, принадлежащее граням BB_1C_1C и DD_1C_1C.

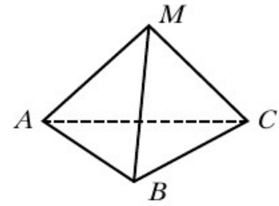
Рис. 3.21



3.2. На рисунке 3.22 изображена пирамида $MABC$. Укажите:

1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые рёбра пирамиды;
5) рёбра основания пирамиды.

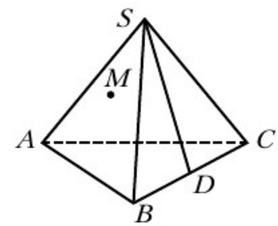
Рис. 3.22



3.3. На ребре BC тетраэдра $SABC$ отметили точку D. Какая прямая является линией пересечения плоскостей: 1) ASD и ABC; 2) ASD и BSC; 3) ASD и ASC? Постройте сечение тетраэдра плоскостью ASD.

3.4. Точка M принадлежит грани ASC тетраэдра $SABC$, точка D – ребру BC (рис. 3.23). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую SD и точку M.

Рис. 3.23



3.5. На боковых рёбрах SA и SB пирамиды $SABCD$ отметили соответственно точки M и K. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

3.6. На боковых рёбрах SA и SC пирамиды $SABCD$ отметили соответственно точки M и K. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

3.7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через: 1) точки A, C и B_1; 2) прямую BD и точку C_1.

3.8. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через прямые AC_1 и BC_1.

3.9. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.24). Точка E принадлежит прямой A_1B_1, точка F – прямой BB_1, точка M – прямой B_1C_1. Постройте сечение призмы плоскостью EFM.

3.10. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.25). Точка D принадлежит прямой AC, точка E – ребру BC. Постройте сечение призмы плоскостью DEC_1.

3.11. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.26). Точка D принадлежит прямой CC_1, точка E – ребру BC. Постройте сечение призмы плоскостью AED.

3.12. Точка M принадлежит грани ASB тетраэдра $SABC$, точка K – грани BSC (рис. 3.27). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

Рис. 3.24

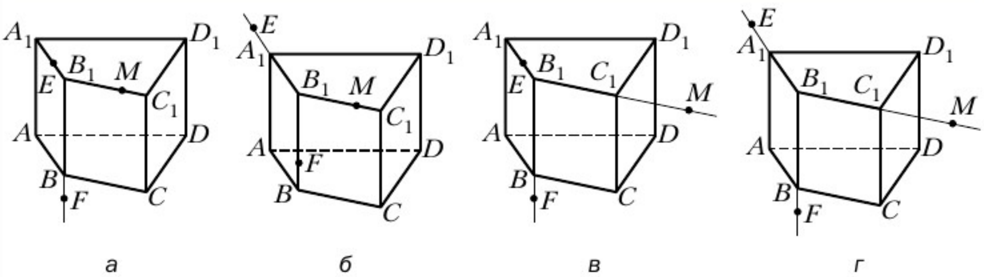


Рис. 3.25

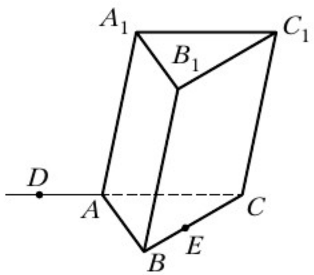
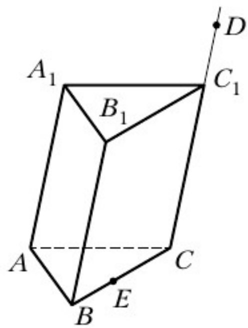


Рис. 3.26



3.13. Точка M принадлежит грани ASB пирамиды $SABCD$, точка K – грани CSD (рис. 3.28). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

3.14. Дана пирамида $SABCD$ (рис. 3.29). Постройте линию пересечения плоскостей ASB и CSD.

Рис. 3.27

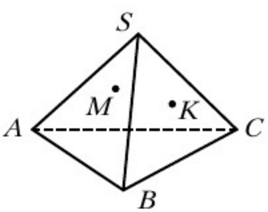


Рис. 3.28

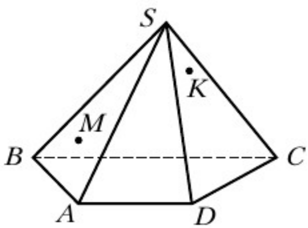
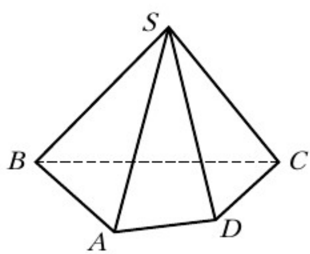


Рис. 3.29



3.15. Дана пирамида $SABCDE$ (рис. 3.30). Постройте линию пересечения плоскостей ASE и BSC.

3.16. На рёбрах AB и CD тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E и F. Постройте линию пересечения плоскостей AFB и CED.

3.17. Дана пирамида $MABCD$, точка K принадлежит отрезку BD (рис. 3.31). Постройте линию пересечения плоскостей MCK и MAB.

3.18. На рёбрах AD и CD пирамиды $SABCD$ отметили соответственно точки M и K (рис. 3.32). Постройте линию пересечения плоскостей BSC и MSK.

Рис. 3.30

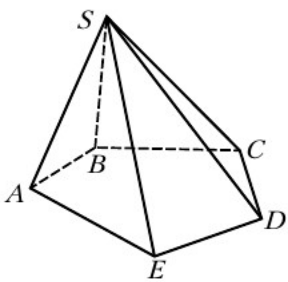


Рис. 3.31

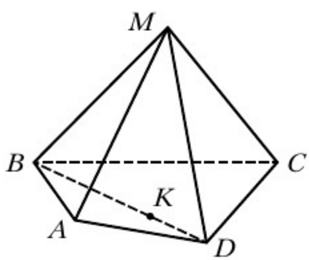
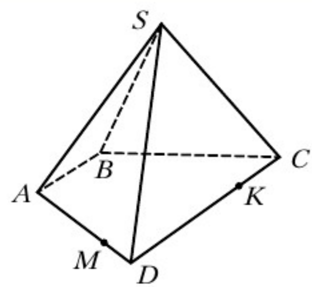


Рис. 3.32



3.19. На рёбрах AB, AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E, F и M (рис. 3.33). Постройте сечение куба плоскостью EFM.

3.20. На рёбрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E и F (рис. 3.34). Постройте сечение куба плоскостью EB_1F.

3.21. На рёбрах BB_1, CC_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E, F и K (рис. 3.35). Постройте сечение куба плоскостью EFK.

Рис. 3.33

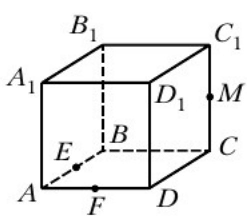


Рис. 3.34

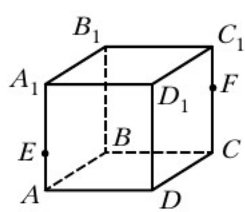
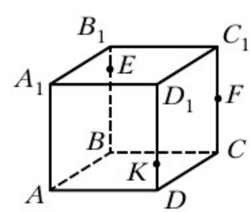


Рис. 3.35



3.22. На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, K и N (рис. 3.36). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.23. На рёбрах AB, BC и CD тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, K и N (рис. 3.37). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.24. На рёбрах AC и BD тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E и F, а на ребре CD – точки M и K так, что точка K лежит между точками C и M (рис. 3.38). Постройте линию пересечения плоскостей ABM и EFK.

Рис. 3.36

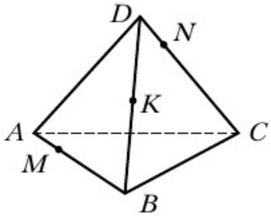


Рис. 3.37

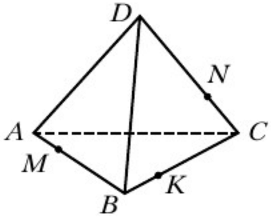
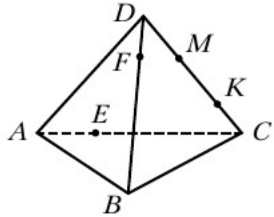


Рис. 3.38



3.25. На боковых рёбрах MB и MC пирамиды $MABCD$ отметили соответственно точки E и F (рис. 3.39). Постройте линию пересечения плоскостей AEC и BDF.

3.26. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.40). На боковых рёбрах MB и MC отметили соответственно точки E и F, а на продолжении ребра MA за точку A – точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

3.27. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E (рис. 3.41). Постройте сечение призмы плоскостью BA_1E.

Рис. 3.39

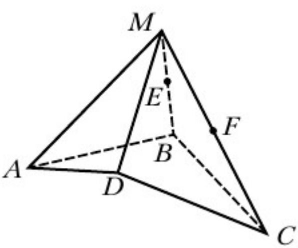


Рис. 3.40

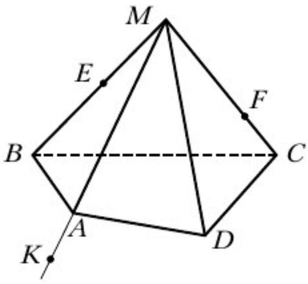
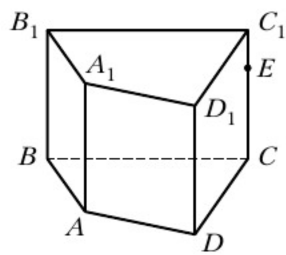


Рис. 3.41



3.28. Верно ли, что если все грани многогранника – равные квадраты, то этот многогранник – куб?

3.29. Точки M, N и K принадлежат соответственно граням ADB, BDC и CDA тетраэдра $DABC$ (рис. 3.42). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.30. Может ли рисунок 3.43 служить изображением некоторого многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

Рис. 3.42

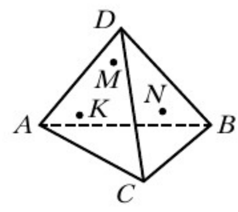
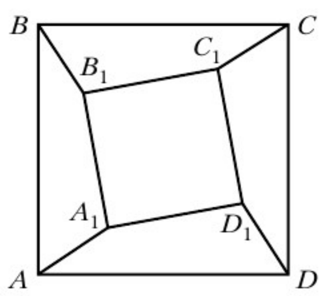


Рис. 3.43



Упражнения для повторения

3.31. Диагональ равнобокой трапеции разбивает её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

3.32. Через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно стороне AC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите отношение площади треугольника EBF к площади треугольника ABC.

Когда сделаны уроки

Метод сечений

В предыдущем параграфе вы познакомились с понятием сечения многогранника и начали учиться строить сечения. Умение правильно строить сечения позволяет корректно изображать фигуры, получающиеся при пересечении многогранников и плоскостей. Кроме того, построение сечения может являться ключом к решению ряда стереометрических задач. Продемонстрируем сказанное на примерах.

Задача 1. На рёбрах SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Известно, что прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X, прямые BC и B_1C_1 – в точке Y, а прямые AC и A_1C_1 – в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.44). Поскольку точка X принадлежит прямой A_1B_1, то точка X принадлежит и плоскости $A_1B_1C_1$. Кроме того, точка X принадлежит прямой AB, а значит, принадлежит плоскости ABC. Таким образом, точка X принадлежит прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ABC. Аналогично доказывается, что точки Y и Z также принадлежат прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ABC. Следовательно, точки X, Y и Z лежат на одной прямой. ◂

Задача 1 тесно связана с одним из важных и очень интересных разделов геометрии – «проективной геометрией». Если в школьном курсе геометрии одними из главных объектов изучения являются величины (длины отрезков, меры углов, площади многоугольников и т. п.), то в проективной геометрии главными «действующими лицами» являются прямые и точки их пересечения. Характерным примером утверждения проективной геометрии является теорема Дезарга.

Теорема Дезарга

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены на плоскости так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 принадлежат одной прямой.

Обратите внимание, что если на рисунок 3.44 посмотреть как на планиметрический рисунок (рис. 3.45), то он будет иллюстрацией теоремы Дезарга.

Рис. 3.44

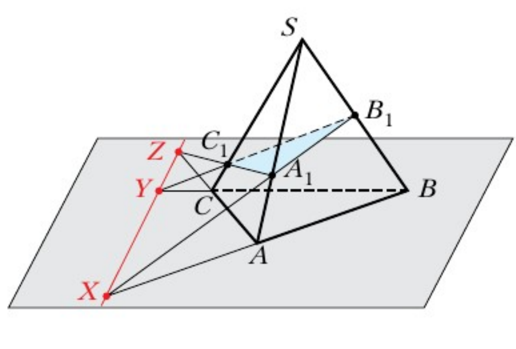
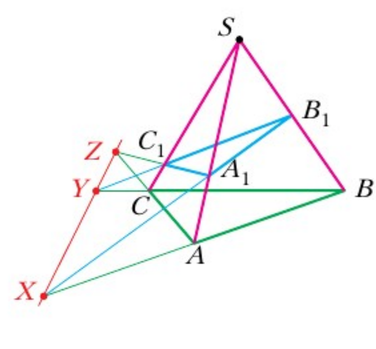


Рис. 3.45



<u>Задача 2.</u> Точки M и K являются серединами сторон AC и BC треугольника ABC, а точка S не принадлежит плоскости ABC. В каком отношении плоскость, проходящая через прямую AB и середину отрезка SC, делит отрезки SM и SK (рис. 3.46)?

Рис. 3.46

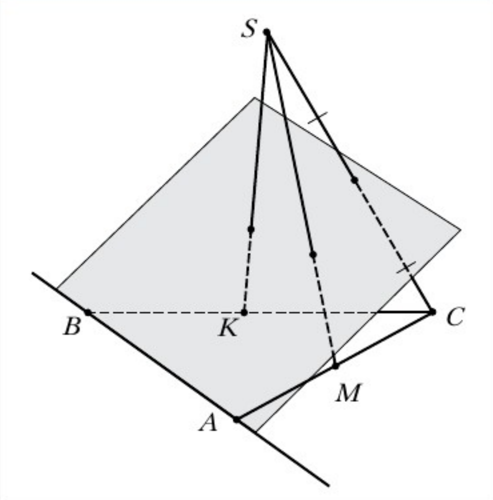
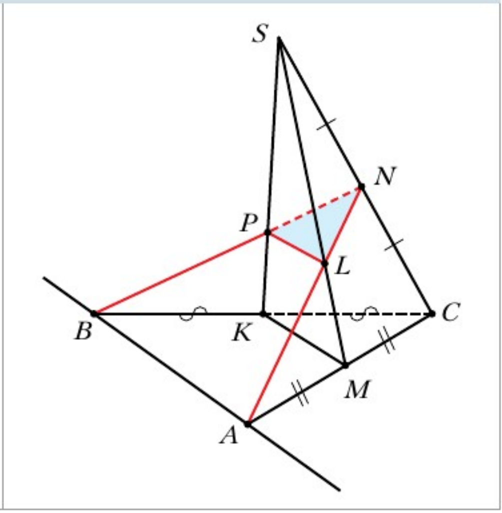
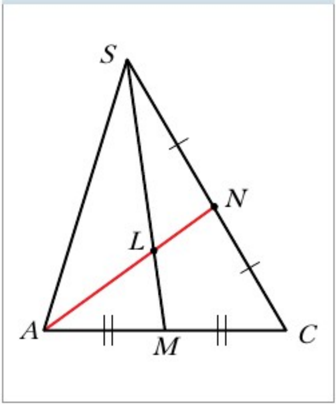


Рис. 3.47



Решение. Обозначим через N середину отрезка SC и построим сечение пирамиды $SKMC$ плоскостью ABN (рис. 3.47). Для этого проведём прямые AN и BN и соединим точки L и P пересечения этих прямых соответственно с рёбрами SM и SK. Получим треугольник PNL, являющийся сечением. Поскольку точка M – середина стороны AC, а точка N – середина стороны SC, то отрезки AN и SM являются медианами треугольника ASC (рис. 3.48). Поэтому точка их пересечения L делит медиану SM в отношении $2 : 1$, считая от точки S. Отсюда получаем, что $SL : LM = 2 : 1$. Аналогично доказывается, что $SP : PK = 2 : 1$. ◄

Рис. 3.48



__Задача 3.__ Точка X является серединой ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каком отношении плоскость XCD_1 делит ребро AB?

Решение. Найдём точку пересечения плоскости XCD_1 и прямой AB (рис. 3.49). Пусть прямая D_1X пересекает прямую DA в точке Y. Треугольник YAX подобен треугольнику YDD_1 (рис. 3.50). Поэтому $\frac{YA}{YD} = \frac{AX}{DD_1} = \frac{1}{2}$.

Поскольку точки Y и C принадлежат плоскости сечения, то и прямая YC также лежит в плоскости сечения. Пусть прямая YC пересекает прямую AB в точке Z. Точка Z принадлежит плоскости сечения и прямой AB, поэтому точка Z является точкой пересечения плоскости XCD_1 и прямой AB. Поскольку треугольник YAZ подобен треугольнику YDC (рис. 3.51), то $\frac{YA}{YD} = \frac{AZ}{DC} = \frac{1}{2}$. Поэтому точка Z является серединой стороны AB, т. е. плоскость XCD_1 делит ребро AB пополам. ◂

Рис. 3.49

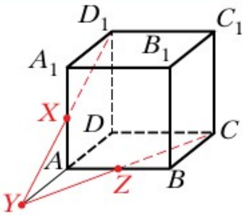


Рис. 3.50

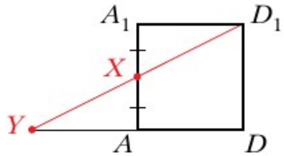
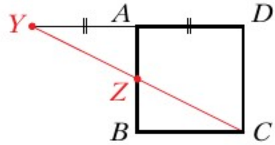


Рис. 3.51



<u>Задача 4.</u> На рёбрах AB и BC четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки X и Y так, что $2AX = BX$ и $4BY = BC$. Плоскость XYC_1 пересекает ребро AA_1 в точке Z. Найдите отрезок ZA_1, если боковое ребро призмы равно 6 см.

Решение. Пусть прямая C_1Y пересекает прямую B_1B в точке K (рис. 3.52). Поскольку треугольник KBY подобен треугольнику KB_1C_1 (рис. 3.53), то $\frac{KB}{KB_1} = \frac{BY}{B_1C_1} = \frac{1}{4}$. Имеем: $KB_1 = KB + BB_1 = KB + 6$. Тогда из равенства $\frac{KB}{KB_1} = \frac{1}{4}$ находим, что $KB = 2$ см. Поскольку треугольник KBX подобен треугольнику ZAX (рис. 3.54), то $\frac{KB}{ZA} = \frac{BX}{AX} = 2$. Из равенства $\frac{KB}{ZA} = 2$ находим, что $ZA = 1$ см. Поэтому $ZA_1 = 5$ см. ◂

Рис. 3.52

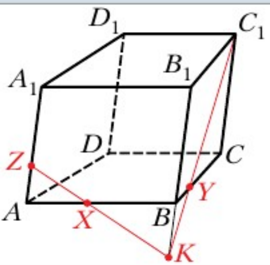


Рис. 3.53

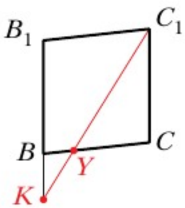
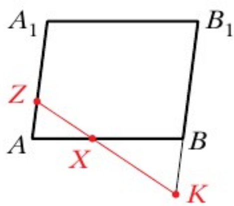


Рис. 3.54



Упражнения

1. На рёбрах AD, AC и CB тетраэдра $DABC$ отмечены точки M, N и K соответственно. Прямые NM и CD пересекаются в точке X, а прямые NK и AB – в точке Y. Докажите, что прямые XK, MY и BD пересекаются в одной точке.
2. Докажите, что середины рёбер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в одной плоскости.
3. На рёбрах AA_1 и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ отметили соответственно точки X и Y так, что $AX : XA_1 = BY : YB_1$. Докажите, что прямая пересечения плоскостей XYC_1 и ABC параллельна прямой AB.
4. На рёбрах AB и AA_1 четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки X и Y так, что $AX = 2XB$. Постройте сечение призмы плоскостью XYC_1. В каком отношении точка Y делит ребро AA_1, если плоскость XYC_1 пересекает ребро A_1D_1 в его середине?
5. Через вершину A и середины рёбер A_1D_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели плоскость. Постройте сечение куба этой плоскостью и найдите, в каком отношении плоскость сечения делит ребро BC.
6. Точка K – середина ребра BC тетраэдра $DABC$. Через точку пересечения медиан грани ABD и середины отрезков AK и DK провели плоскость. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью и найдите расстояние между точкой A и точкой пересечения секущей плоскости с прямой AC, если $AC = 12$ см.

Итоги главы 1

Основные аксиомы стереометрии

А1. В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

А2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

А3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

А4. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Плоскость однозначно определяется:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;

2) прямой и не принадлежащей ей точкой;

3) двумя пересекающимися прямыми.

Сечение многогранника

Если все общие точки многогранника и плоскости образуют многоугольник, то этот многоугольник называют сечением многогранника плоскостью, а саму плоскость — секущей плоскостью.

Глава 2. Параллельность в пространстве

В этой главе вы узнаете о взаимном расположении двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве. Ознакомитесь с правилами, по которым изображают пространственные фигуры на плоскости. Получите представление о преобразованиях фигур в пространстве.

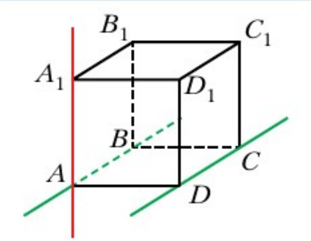
§ 4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Из курса планиметрии вы знаете, что две прямые называют пересекающимися, если они имеют только одну общую точку. Такое же определение пересекающимся прямым дают и в стереометрии.

Вам также известно, что две прямые называют параллельными, если они не пересекаются. Можно ли это определение перенести в стереометрию?

Обратимся к рисунку 4.1, на котором изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каждая из прямых AB и AA_1 не имеет с прямой DC общих точек. При этом прямые AB и DC лежат в одной плоскости – в плоскости ABC, а прямые AA_1 и DC не лежат в одной плоскости, т. е. не существует плоскости, проходящей через эти прямые.

Рис. 4.1



Этот пример показывает, что в стереометрии для двух прямых, не имеющих общих точек, возможны два случая взаимного расположения: прямые лежат в одной плоскости и прямые не лежат в одной плоскости. Для каждого из этих случаев введём соответствующее определение.

Определение

Две прямые в пространстве называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если прямые a и b параллельны, то записывают: $a \parallel b$.

Определение

Две прямые в пространстве называют скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Например, на рисунке 4.1 прямые AB и DC параллельные, а прямые AA_1 и DC скрещивающиеся.

Наглядное представление о параллельных прямых дают колонны здания, брёвна сруба, корабельный лес (рис. 4.2). Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают провода линий электропередачи (рис. 4.3), различные элементы строительных конструкций.

Рис. 4.2

Казанский собор в Санкт-Петербурге | Брёвна сруба | Корабельный лес

Рис. 4.3

Линия электропередачи

Итак, существуют три возможности взаимного расположения двух прямых в пространстве:

1) прямые пересекаются;
2) прямые параллельны;
3) прямые скрещиваются.

Сказанное иллюстрирует схема, приведённая на рисунке 4.4.

Рис. 4.4

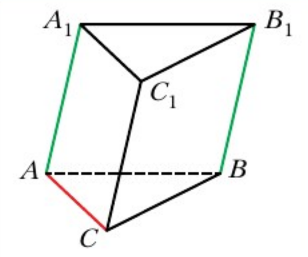
Две прямые в пространстве
- → лежат в одной плоскости
  - → пересекаются
  - → параллельны
- → скрещиваются

Два отрезка называют **параллельными** (**скрещивающимися**), если они лежат на параллельных (скрещивающихся) прямых.

Например, рёбра AA_1 и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4.5) являются параллельными, а рёбра AC и BB_1 – скрещивающимися.

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых.

Рис. 4.5



Теорема 4.1

Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство

Пусть даны параллельные прямые a и b. Докажем, что существует единственная плоскость α, такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$.

Существование плоскости α, проходящей через прямые a и b, следует из определения параллельных прямых.

Если предположить, что существует ещё одна плоскость, проходящая через прямые a и b, то через прямую a и некоторую точку прямой b будут проходить две различные плоскости, что противоречит теореме 2.1. ◄

В § 2 были указаны три способа задания плоскости. Теорему 4.1 можно рассматривать как ещё один способ задания плоскости – с помощью двух параллельных прямых.

Пусть точка A не принадлежит прямой a. Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных прямой a? В планиметрии ответ на этот вопрос содержится в аксиоме параллельности прямых. И в стереометрии это утверждение тоже можно было бы принять за аксиому. Однако в нашем курсе уже накопилось немало содержательных фактов, позволяющих вывести его в качестве следствия из других истинных утверждений.

Теорема 4.2

Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Пусть даны прямая a и точка A, такие, что $A \notin a$. Докажем, что существует единственная прямая b, такая, что $b \parallel a$ и $A \in b$.

По теореме 2.1 существует единственная плоскость α, такая, что $A \in \alpha$ и $a \subset \alpha$ (рис. 4.6).

По аксиоме **A1** в плоскости α выполняется аксиома параллельности прямых. Тогда в плоскости α через точку A можно провести прямую, параллельную прямой a. На рисунке 4.6 это прямая b.

Аксиома параллельности прямых гарантирует, что в плоскости α такая прямая b единственная. Однако сказанное ещё не означает, что в пространстве нет других прямых, проходящих через точку A и параллельных прямой a.

Пусть существует прямая b_1, не принадлежащая плоскости α, такая, что $A \in b_1$ и $b_1 \parallel a$. Параллельные прямые b_1 и a задают некоторую плоскость β. Плоскости α и β проходят через прямую a и точку A. Следовательно, по теореме 2.1 эти плоскости совпадают. Отсюда получаем, что $b_1 \subset \alpha$. Это противоречит сделанному предположению.

Следовательно, прямая b – единственная прямая, такая, что $b \parallel a$ и $A \in b$. ◄

Установить параллельность двух прямых, лежащих в одной плоскости, можно с помощью известных вам из курса планиметрии признаков параллельности двух прямых. А как установить, являются ли две прямые скрещивающимися? Ответить на этот вопрос позволяет следующая теорема.

Теорема 4.3
(признак скрещивающихся прямых)

Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Пусть даны плоскость α и прямые a и b, такие, что $a \subset \alpha$ и $b \cap \alpha = M$, причём $M \notin a$ (рис. 4.7). Докажем, что прямые a и b скрещивающиеся.

Рис. 4.6

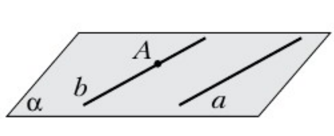
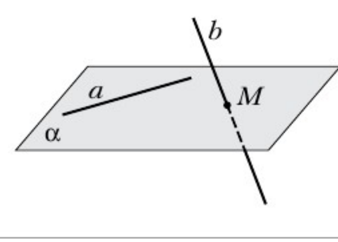


Рис. 4.7



Предположим, что прямые a и b не являются скрещивающимися. Тогда они принадлежат некоторой плоскости β. Плоскости α и β проходят через прямую a и точку M, не принадлежащую прямой a. Следовательно, по теореме 2.1 эти плоскости совпадают. Таким образом, $b \subset \alpha$, что противоречит условию $b \cap \alpha = M$. Следовательно, прямые a и b являются скрещивающимися. ◂

На рисунке 4.8 рёбра AB и DC тетраэдра $DABC$ являются скрещивающимися. Действительно, прямая DC пересекает плоскость ABC в точке C, не принадлежащей прямой AB. Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых прямые AB и DC являются скрещивающимися.

Задача. Докажите, что все параллельные прямые, пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости (рис. 4.9).

Решение. Пусть a – одна из параллельных прямых, пересекающих данную прямую m. По теореме 2.2 через пересекающиеся прямые a и m проходит единственная плоскость α (рис. 4.10). Докажем, что любая прямая, параллельная прямой a и пересекающая прямую m, лежит в плоскости α.

Рассмотрим прямую b, параллельную прямой a и пересекающую прямую m в некоторой точке M (см. рис. 4.10). Предположим, что прямая b не принадлежит плоскости α. Поскольку точка M не принадлежит прямой a, то по признаку скрещивающихся прямых прямые b и a являются скрещивающимися, что противоречит условию $b \parallel a$. Следовательно, прямая b принадлежит плоскости α. ◂

Рис. 4.8

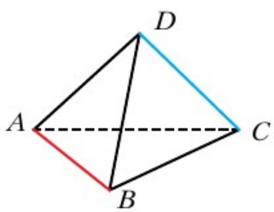


Рис. 4.9

Рис. 4.10

1. Какие две прямые в пространстве называют параллельными?
2. Какие две прямые в пространстве называют скрещивающимися?
3. Какие существуют случаи расположения прямых в пространстве?
4. Какие два отрезка называют параллельными? скрещивающимися?

5. Сформулируйте теорему о плоскости, которую задают две параллельные прямые.
6. Сформулируйте теорему о прямой, проходящей через заданную точку параллельно данной прямой.
7. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.

Упражнения

4.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.11). Назовите рёбра: 1) параллельные ребру CD; 2) скрещивающиеся с ребром CD.

4.2. Приведите примеры, иллюстрирующие понятие «скрещивающиеся прямые», используя предметы классной комнаты.

4.3. Дана пирамида $SABCD$ (рис. 4.12). Назовите рёбра пирамиды, скрещивающиеся с ребром SA.

4.4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Укажите взаимное расположение прямых:

1) BC и A_1C;	3) BD и CC_1;	5) DC_1 и BB_1;
2) AB и C_1D_1;	4) AB_1 и DC_1;	6) AA_1 и CC_1.

Рис. 4.11

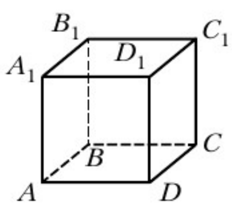


Рис. 4.12

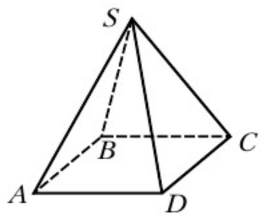
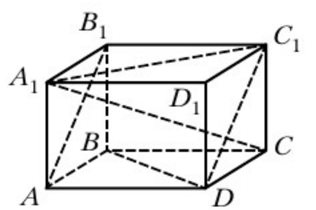


Рис. 4.13



4.5. Верно ли утверждение:

1) две прямые, не являющиеся параллельными, имеют общую точку;

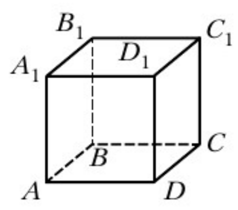
2) две прямые, не являющиеся скрещивающимися, лежат в одной плоскости;

3) две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются;

4) две прямые являются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны?

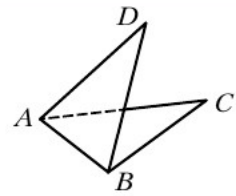
4.6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.14). Докажите, что прямые AA_1 и BC скрещивающиеся.

Рис. 4.14



4.7. Треугольники ABC и ADB лежат в разных плоскостях (рис. 4.15). Каково взаимное расположение прямых AD и BC? Ответ обоснуйте.

Рис. 4.15



4.8. Через точку, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Докажите, что хотя бы одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися.

4.9. Прямые a и b скрещивающиеся. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D – прямой b. Каково взаимное расположение прямых AC и BD? Ответ обоснуйте.

4.10. Прямые a и b параллельны. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D – прямой b. Каково взаимное расположение прямых AC и BD? Ответ обоснуйте.

4.11. Каким может быть взаимное расположение прямых b и c, если:

1) прямые a и b пересекаются, а прямые a и c параллельны;

2) прямые a и b параллельны, а прямые a и c скрещивающиеся?

4.12. Сколько плоскостей могут задавать три попарно параллельные прямые? Сделайте рисунок.

4.13. Сколько плоскостей задают четыре попарно параллельные прямые, никакие три из которых не лежат в одной плоскости? Сделайте рисунок.

4.14. Конец A отрезка AB принадлежит плоскости α. Через точку B и точку C, принадлежащую отрезку AB, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно.

1) Докажите, что точки A, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

2) Найдите отрезок BB_1, если точка C – середина отрезка AB и $CC_1 = 5$ см.

3) Найдите отрезок CC_1, если $AC : BC = 3 : 4$ и $BB_1 = 28$ см.

4.15. Конец C отрезка CD принадлежит плоскости β. На отрезке CD отмечена точка E так, что $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D и E проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках D_1 и E_1 соответственно. Найдите отрезок DD_1, если $EE_1 = 12$ см.

4.16. На отрезке AB, не пересекающем плоскость α, отмечена точка C так, что $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно.

1) Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

2) Найдите отрезок A_1C_1, если $B_1C_1 = 10$ см.

4.17. Точка C – середина отрезка AB, не пересекающего плоскость β. Через точки A, B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок AA_1, если $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

4.18. Прямые a, b и c пересекают плоскость α в точках A, B и C, не лежащих на одной прямой (рис. 4.16). Прямая b пересекает прямую a в точке D, а прямая c – в точке E. Докажите, что прямые b и c скрещивающиеся.

4.19. Известно, что прямые a и b скрещивающиеся и прямые b и c скрещивающиеся. Можно ли утверждать, что прямые a и c скрещивающиеся?

4.20. Для прямых на плоскости верно утверждение: «Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую». Верно ли это утверждение для прямых в пространстве?

4.21. Точка M не принадлежит ни одной из скрещивающихся прямых a и b. Можно ли через точку M провести две прямые, каждая из которых будет пересекать и прямую a, и прямую b?

4.22. Точка M не принадлежит ни одной из параллельных прямых a и b. Известно, что через точку M можно провести прямую, пересекающую каждую из прямых a и b. Докажите, что прямые a и b и точка M лежат в одной плоскости.

4.23. Через концы отрезка AB, пересекающего плоскость α, и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно (рис. 4.17). Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

Рис. 4.16

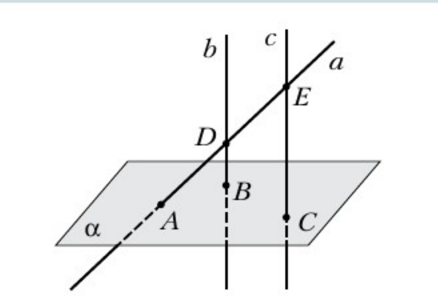
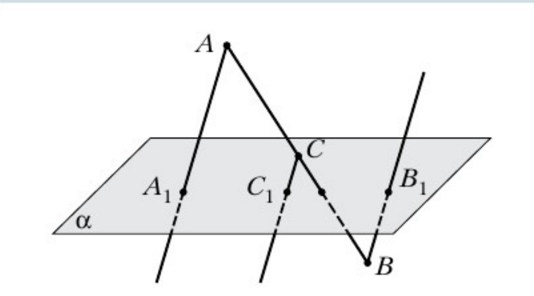


Рис. 4.17



4.24. На отрезке AB, пересекающем плоскость α, отмечена точка C так, что $AC : BC = 5 : 3$. Через точки A, B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок AA_1, если $BB_1 = 10$ см, $CC_1 = 4$ см и точки A и C лежат по разные стороны от плоскости α.

4.25. Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α. Отрезок BM – медиана треугольника ABC, точка O – середина отрезка BM. Через точки A, B, C, M и O проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 и O_1 соответственно. Найдите отрезок BB_1, если $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

4.26. Вершина A параллелограмма $ABCD$ принадлежит плоскости α. Через вершины B, C и D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, если $DD_1 = 9$ см, $BB_1 = 26$ см.

Упражнения для повторения

4.27. Прямая пересекает сторону AB треугольника ABC в точке M, а сторону BC – в точке K, таких, что $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$. Докажите, что $MK \parallel AC$.

4.28. Точка E – середина медианы BM треугольника ABC. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение, в котором точка K делит отрезок BC, считая от вершины B.

§ 5. Параллельность прямой и плоскости

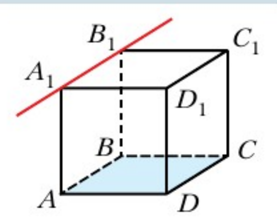
Вам уже знакомы два возможных случая взаимного расположения прямой и плоскости:

1) прямая принадлежит плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости;

2) прямая пересекает плоскость, т. е. прямая имеет с плоскостью только одну общую точку.

Понятно, что возможен и третий случай, когда прямая и плоскость не имеют общих точек. Например, прямая, содержащая ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не имеет общих точек с плоскостью ABC (рис. 5.1).

Рис. 5.1



Определение

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Если прямая a и плоскость α параллельны, то записывают: $a \parallel \alpha$. Также принято говорить, что прямая a параллельна плоскости α, а плоскость α параллельна прямой a.

Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают некоторые спортивные снаряды: брусья и перекладина параллельны плоскости пола (рис. 5.2). Другой пример даёт водосточная труба: она параллельна плоскости стены (рис. 5.3).

Рис. 5.2

Рис. 5.3

Выяснять с помощью определения, являются ли данные прямая и плоскость параллельными, затруднительно. Гораздо эффективнее пользоваться следующей теоремой.

Теорема 5.1

(признак параллельности прямой и плоскости)

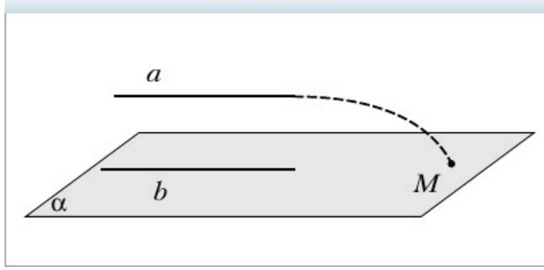
Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Доказательство

Пусть прямая a, не принадлежащая плоскости α, и прямая b, принадлежащая плоскости α, таковы, что $a \parallel b$. Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Предположим, что прямая a пересекает плоскость α в некоторой точке M (рис. 5.4). Если $M \in b$, то прямые a и b будут пересекающимися, что противоречит условию $a \parallel b$. Если $M \notin b$, то по признаку скрещивающихся прямых прямые a и b будут скрещивающимися, что также противоречит

Рис. 5.4



условию $a \parallel b$. Следовательно, прямая a не может пересекать плоскость α. Таким образом, $a \parallel \alpha$. ◄

На рисунке 5.1 прямые A_1B_1 и AB содержат противоположные стороны квадрата ABB_1A_1. Эти прямые параллельны. Поскольку $AB \subset ABC$, то по признаку параллельности прямой и плоскости $A_1B_1 \parallel ABC$.

Отрезок называют **параллельным плоскости**, если он принадлежит прямой, параллельной этой плоскости. Например, ребро AB куба параллельно плоскости CDD_1 (см. рис. 5.1).

Вы умеете устанавливать параллельность двух прямых с помощью теорем-признаков, известных из планиметрии. Рассмотрим теоремы, описывающие достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

Теорема 5.2

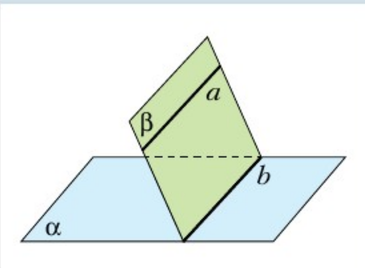
Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Доказательство

Пусть даны прямая a и плоскости α и β, такие, что $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$ (рис. 5.5). Докажем, что $a \parallel b$.

Прямые a и b лежат в одной плоскости. Значит, они или пересекаются, или параллельны. Если прямая a пересекает прямую b, то она также будет пересекать плоскость α, что противоречит условию $a \parallel \alpha$. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. $a \parallel b$. ◄

Рис. 5.5



Следствие

Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной прямой.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 5.3

Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются по

прямой, отличной от двух данных, то эта прямая параллельна каждой из двух данных прямых.

Доказательство

Пусть даны прямые a и b и плоскости α и β, такие, что $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5.6). Докажем, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Поскольку $a \parallel b$ и $b \subset \beta$, то по признаку параллельности прямой и плоскости получаем, что $a \parallel \beta$. Через прямую a проходит плоскость α, пересекающая плоскость β по прямой c. Тогда по теореме 5.2 получаем, что $a \parallel c$. Аналогично доказывается, что $b \parallel c$. ◄

Теорема 5.4

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Доказательство

Пусть даны три прямые a, b и c, такие, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$.

Случай, когда прямые a, b и c лежат в одной плоскости, рассмотрен в планиметрии. Предположим теперь, что эти прямые не лежат в одной плоскости.

Выберем на прямой a произвольную точку M. Через прямую b и точку M проведём плоскость α, а через прямую c и точку M проведём плоскость β (рис. 5.7). Пусть $\alpha \cap \beta = a_1$. Поскольку $b \parallel c$, то по теореме 5.3 получаем, что $b \parallel a_1$ и $c \parallel a_1$. Тогда через точку M проходят две прямые a и a_1, параллельные прямой c. Следовательно, прямые a и a_1 совпадают. Значит, $a \parallel b$. ◄

Рис. 5.6

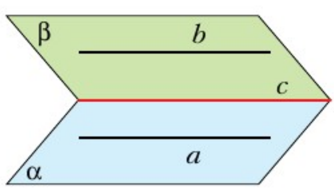
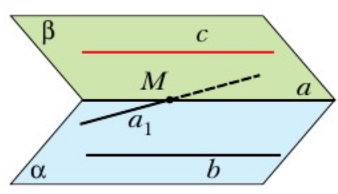


Рис. 5.7



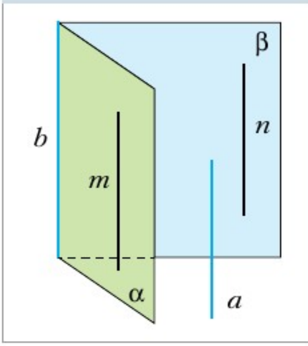
<u>**Задача 1.**</u> Докажите, что если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.

Решение. Пусть даны прямая a и плоскости α и β, такие, что $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 5.8). Докажем, что $a \parallel b$.

По следствию из теоремы 5.2 в плоскостях α и β найдутся соответственно такие прямые m и n, что $m \parallel a$ и $n \parallel a$. Если хотя бы одна из прямых m или n совпадает с прямой b, то задача решена. Если каждая из прямых m и n отлична от прямой b, то по теореме 5.4 получаем, что $m \parallel n$.

Воспользовавшись теоремой 5.3, приходим к выводу, что $b \parallel n$. Но $n \parallel a$, следовательно, $a \parallel b$. ◄

Рис. 5.8



<u>Задача 2.</u> Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через ребро AC основания и точку M, принадлежащую ребру A_1B_1 другого основания.

Решение. Секущая плоскость и плоскость $A_1B_1C_1$ имеют общую точку M, следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку M (рис. 5.9).

Поскольку четырёхугольник AA_1C_1C – параллелограмм, то прямая AC параллельна прямой A_1C_1. Следовательно, $AC \parallel A_1B_1C_1$. Тогда по теореме 5.2 секущая плоскость пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой, параллельной прямой AC.

В плоскости $A_1B_1C_1$ через точку M проведём прямую, параллельную прямой A_1C_1 (см. рис. 5.9). Пусть эта прямая пересекает ребро B_1C_1 в точке N. По теореме 5.4 получаем, что $MN \parallel AC$. Тогда четырёхугольник $AMNC$ – искомое сечение. ◄

Рис. 5.9

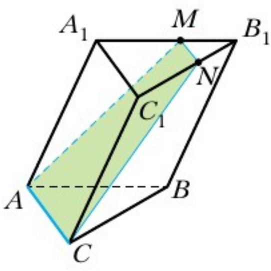


Рис. 5.10

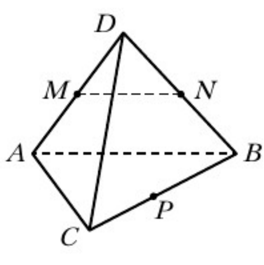
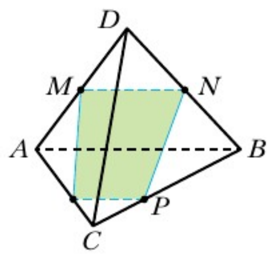


Рис. 5.11



Задача 3. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через середины M и N соответственно рёбер AD и BD и точку P, принадлежащую ребру BC.

Решение. Соединим точки M и N (рис. 5.10). Поскольку отрезок MN – средняя линия треугольника ADB, то $MN \parallel AB$. Следовательно, $MN \parallel ABC$.

По теореме 5.2 секущая плоскость пересекает плоскость ABC по прямой, параллельной прямой MN, причём эта прямая проходит через точку P. Проведём через точку P прямую, параллельную прямой MN. Пусть K – точка пересечения проведённой прямой со стороной AC (рис. 5.11). Четырёхугольник $KMNP$ – искомое сечение. ◄

1. В каком случае прямую и плоскость называют параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какой отрезок называют параллельным плоскости?
4. Сформулируйте теоремы, описывающие достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

Упражнения

5.1. Укажите среди окружающих предметов модели плоскости и параллельной ей прямой.

5.2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.12). Плоскостям каких граней куба параллельно ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

5.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.13), точки E и F – середины рёбер CC_1 и DD_1 соответственно. Запишите грани параллелепипеда, которым параллельна прямая: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

Рис. 5.12

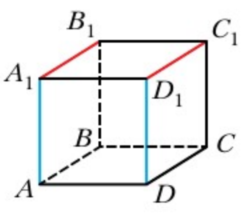
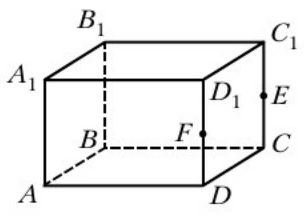


Рис. 5.13



5.4. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли утверждение, что прямая a параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α?

5.5. Даны прямые a и b и плоскость α. Верно ли утверждение:

1) если $a \parallel \alpha$ и $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;
2) если $a \parallel b$ и $b \parallel \alpha$, то $a \parallel \alpha$;
3) если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

5.6. Прямая a и плоскость α параллельны прямой b. Каким может быть взаимное расположение прямой a и плоскости α?

5.7. Прямые a и b пересекаются, а плоскость α параллельна прямой a. Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α?

5.8. Вершины E и F правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежат в плоскости α, отличной от плоскости шестиугольника (рис. 5.14). Каково взаимное расположение плоскости α и прямой: 1) BC; 2) AB; 3) BD; 4) AD?

5.9. Точки M и K – середины соответственно сторон AB и BC треугольника ABC. Точка D не принадлежит плоскости ABC. Докажите, что $MK \parallel ADC$.

5.10. Точки E и F – середины соответственно боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Прямая EF лежит в плоскости α, отличной от плоскости трапеции. Докажите, что прямые AD и BC параллельны плоскости α.

5.11. Отрезки BC и AD – основания трапеции $ABCD$. Треугольник BMC и трапеция $ABCD$ не лежат в одной плоскости (рис. 5.15). Точка E – середина отрезка BM, точка F – середина отрезка CM. Докажите, что $EF \parallel AD$.

Рис. 5.14

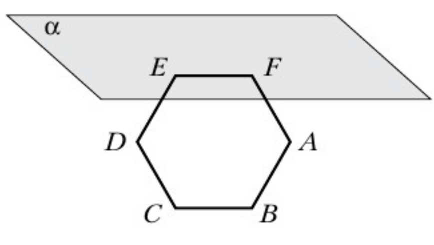
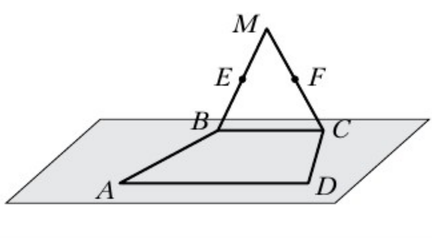


Рис. 5.15



5.12. Параллелограммы $ABCD$ и $AMKD$ не лежат в одной плоскости (рис. 5.16). Докажите, что четырёхугольник $BMKC$ – параллелограмм.

5.13. Плоскость α, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис. 5.17). Найдите отрезок A_1C_1, если $AC = 18$ см и $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

Рис. 5.16

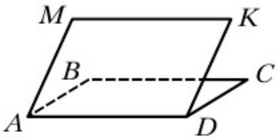
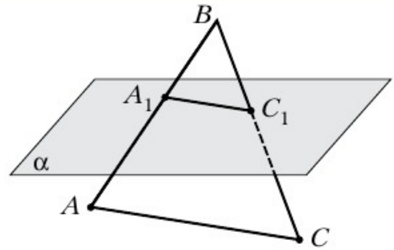


Рис. 5.17



5.14. Плоскость α, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : EC$, если $CF : CB = 3 : 11$.

5.15. Вершины A и C треугольника ABC принадлежат плоскости α, а вершина B не принадлежит этой плоскости. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $BA : BE = BC : BF$. Докажите, что прямая EF параллельна плоскости α.

5.16. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямой AC и пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точка K – середина стороны BC. Найдите площадь четырёхугольника $AMKC$, если площадь треугольника ABC равна 28 см^2.

5.17. На ребре CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку M (рис. 5.18). Постройте линию пересечения плоскостей: 1) ADM и BB_1C_1; 2) AA_1M и DCC_1.

5.18. На ребре A_1B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку K (рис. 5.19). Постройте линию пересечения плоскостей: 1) CC_1K и ABB_1; 2) CDK и ABB_1.

5.19. Точка M – середина ребра DC тетраэдра $DABC$ (рис. 5.20). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и па-

Рис. 5.18

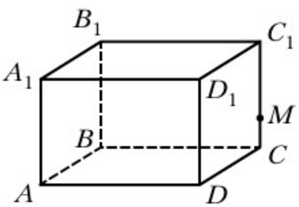


Рис. 5.19

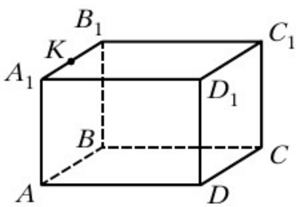
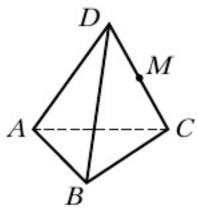


Рис. 5.20



раллельной прямым AD и BD. Вычислите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно a.

5.20. Точка E – середина ребра AD тетраэдра $DABC$ (рис. 5.21). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки B и E и параллельной прямой AC. Вычислите периметр сечения, если каждое ребро тетраэдра равно 4 см.

5.21. Точка M принадлежит ребру AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.22). Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M и C_1 и параллельной прямой AB.

5.22. Точки E и F – середины соответственно рёбер AB и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.23). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной прямой DD_1. Вычислите периметр сечения, если ребро куба равно a.

Рис. 5.21

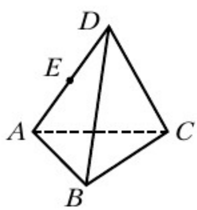


Рис. 5.22

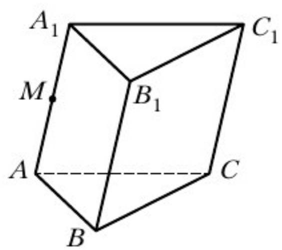
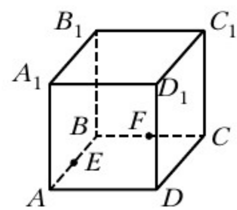


Рис. 5.23



5.23. Дан тетраэдр $DABC$. Плоскость α проходит через прямую CD и параллельна прямой AB. Постройте линию пересечения плоскости α и плоскости ABC.

5.24. Точка M не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$. Постройте линию пересечения плоскостей AMB и CMD.

5.25. Точки E, F, M и K – середины соответственно рёбер AB, BC, AD и CD тетраэдра $DABC$. Докажите, что отрезки MF и KE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

5.26. Прямая a принадлежит плоскости α, прямая b – плоскости β, прямая c – линия пересечения плоскостей α и β. Докажите, что если прямая c не пересекает ни одну из прямых a и b, то $a \parallel b$.

5.27. Прямая a параллельна плоскости α. Через точку M, лежащую в плоскости α, проведена прямая b, параллельная прямой a. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

5.28. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

5.29. Докажите, что если две данные пересекающиеся плоскости пересекают третью плоскость по параллельным прямым, то линия пересечения данных плоскостей параллельна этой третьей плоскости.

5.30. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, CD и AA_1. Найдите периметр сечения, если $AB = 10$ см, $AD = 17$ см, $AA_1 = 24$ см.

5.31. На ребре BC тетраэдра $DABC$ отметили точку E так, что $BE : EC = 2 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно прямым AB и CD. Найдите периметр сечения, если $AB = 18$ см, $CD = 12$ см.

5.32. На рёбрах AD и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 5.24). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую MK параллельно прямой CD.

5.33. На рёбрах AD и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 5.24). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую MK параллельно прямой AB.

5.34. На рёбрах AB и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и K. Постройте линию пересечения плоскостей AA_1K и DD_1M. Каково взаимное расположение построенной прямой и прямой AA_1?

5.35. На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точки E и F (рис. 5.25). Постройте линию пересечения плоскостей AFD и A_1ED_1.

Рис. 5.24

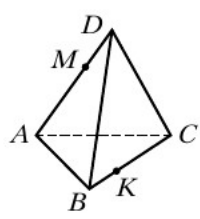
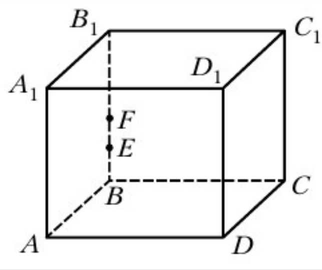


Рис. 5.25



5.36. Точки E и F – середины соответственно рёбер AD и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую EF параллельно прямой B_1D.

5.37. Точка M – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки D и M параллельно прямой AC_1.

5.38. Точки M, N и K принадлежат соответственно граням AA_1C_1C, AA_1B_1B и BB_1C_1C призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.26). Постройте сечение призмы плоскостью MNK.

5.39. Основанием пирамиды $SABCDE$ является пятиугольник $ABCDE$. На рёбрах SE и SD отметили соответственно точки M и N (рис. 5.27). Известно, что $\frac{SM}{SE} = \frac{SN}{SD}$. Постройте сечение пирамиды плоскостью BMN.

Рис. 5.26

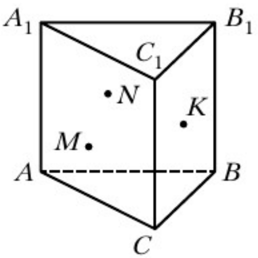
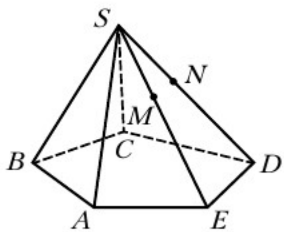


Рис. 5.27



Упражнения для повторения

5.40. Основания трапеции равны 12 см и 18 см, а одна из диагоналей — 20 см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей трапеции делит данную диагональ.

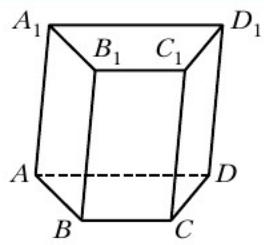
5.41. Боковые стороны прямоугольной трапеции относятся как 3 : 5, а разность оснований равна 16 см. Найдите площадь трапеции, если её меньшая диагональ равна 13 см.

§ 6. Параллельность плоскостей

Рассмотрим вопрос о возможном взаимном расположении двух плоскостей.

Вы знаете, что две плоскости могут иметь общие точки, т. е. пересекаться. Понятно, что две плоскости могут и не иметь общих точек. Например, плоскости ABC и $A_1B_1C_1$, содержащие основания призмы, не имеют общих точек (рис. 6.1).

Рис. 6.1



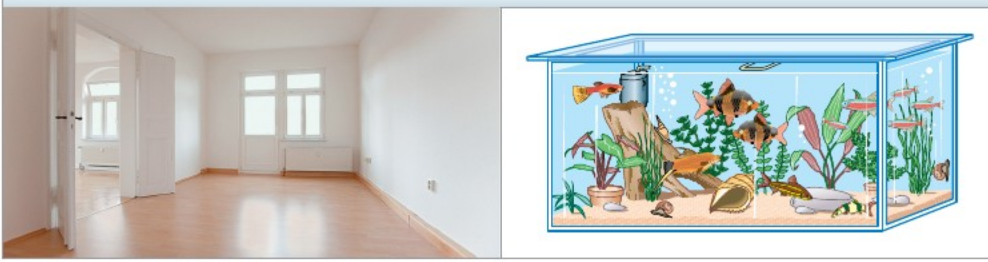
Определение

Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Если плоскости α и β параллельны, то записывают $\alpha \parallel \beta$. Также принято говорить, что плоскость α параллельна плоскости β или плоскость β параллельна плоскости α.

Наглядное представление о параллельных плоскостях дают потолок и пол комнаты; поверхность воды, налитой в аквариум, и его дно (рис. 6.2).

Рис. 6.2



Из определения параллельных плоскостей следует, что *любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости*. Докажите это утверждение самостоятельно.

В тех случаях, когда надо выяснить, являются ли две плоскости параллельными, удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 6.1

(признак параллельности двух плоскостей)

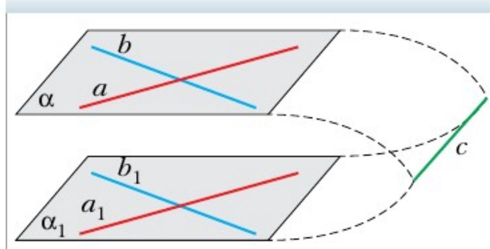
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Пусть даны пересекающиеся прямые a и b, принадлежащие плоскости α, и прямые a_1 и b_1, принадлежащие плоскости α_1, такие, что $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \alpha_1$.

Предположим, что плоскости α и α_1 пересекаются. Пусть $\alpha \cap \alpha_1 = c$ (рис. 6.3).

Рис. 6.3



Поскольку $a \parallel a_1$ и $a_1 \subset \alpha_1$, то по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \alpha_1$.

Через прямую a проходит плоскость α, которая пересекает плоскость α_1 по прямой c. Тогда по теореме 5.2 получаем, что $a \parallel c$. Аналогично можно доказать, что $b \parallel c$.

Получили, что в плоскости α каждая из двух пересекающихся прямых a и b параллельна прямой c. А это противоречит аксиоме параллельности прямых. Следовательно, предположение о том, что плоскости α и α_1 пересекаются, является неверным. Итак, $\alpha \parallel \alpha_1$. ◄

На рисунке 6.4 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имеем: $AA_1 \parallel DD_1$ и $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тогда по признаку параллельности двух плоскостей $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Будем говорить, что **два многоугольника параллельны**, если они лежат в параллельных плоскостях. Например, грани AA_1B_1B и DD_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны (см. рис. 6.4).

Рассмотрим некоторые свойства параллельных плоскостей.

Теорема 6.2

Через точку в пространстве, не принадлежащую данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.

Доказательство

Пусть даны плоскость α и не принадлежащая ей точка A (рис. 6.5). Докажем, что через точку A проходит плоскость, параллельная плоскости α.

Рис. 6.4

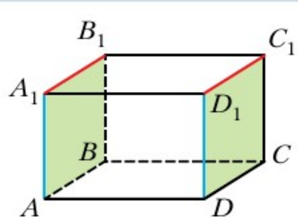
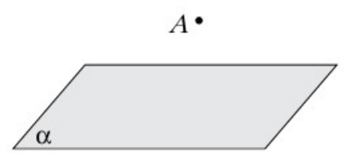


Рис. 6.5



В плоскости α проведём две пересекающиеся прямые a и b. Через точку A проведём прямые a_1 и b_1, такие, что $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ (рис. 6.6). Пересекающиеся прямые a_1 и b_1 определяют некоторую плоскость β. По признаку параллельности двух плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

Теперь докажем, что плоскость β единственная.

Предположим, что существует ещё одна плоскость β_1, такая, что $A \in \beta_1$ и $\alpha \parallel \beta_1$. Плоскости β и β_1 имеют общую точку A. Следовательно, они пересекаются. Пусть $\beta \cap \beta_1 = c$ (рис. 6.7).

Поскольку $\alpha \parallel \beta$ и $a \subset \alpha$, то $a \parallel \beta$. Аналогично можно доказать, что $a \parallel \beta_1$. Следовательно, по ключевой задаче 1 § 5 прямая a параллельна прямой пересечения плоскостей β и β_1, т. е. $a \parallel c$.

Аналогично можно доказать, что $b \parallel c$.

Получили, что прямая c параллельна каждой из пересекающихся прямых a и b. Полученное противоречие позволяет сделать вывод, что плоскость β единственная. ◄

Теорема 6.3

Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Доказательство

Пусть даны плоскости α, β и γ, такие, что $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$ (рис. 6.8). Докажем, что $a \parallel b$.

Прямые a и b лежат в одной плоскости (плоскости γ). Значит, они или пересекаются, или параллельны.

Если прямые a и b пересекаются, т. е. имеют общую точку, то общую точку имеют также плоскости α и β, что противоречит условию $\alpha \parallel \beta$.

Таким образом, прямые a и b параллельны. ◄

Рис. 6.6

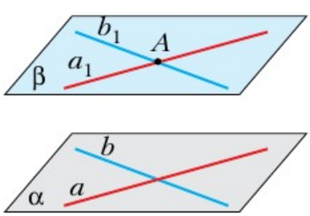


Рис. 6.7

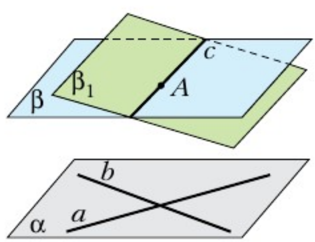
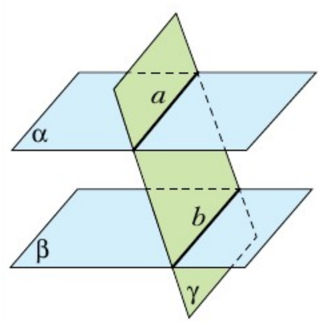


Рис. 6.8



Задача 1. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Решение. Пусть даны параллельные плоскости α и β и параллельные прямые AB и A_1B_1, такие, что $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (рис. 6.9). Докажем, что $AB = A_1B_1$.

Параллельные прямые AB и A_1B_1 задают некоторую плоскость γ, причём $\alpha \cap \gamma = AA_1$ и $\beta \cap \gamma = BB_1$.

По теореме 6.3 получаем, что $AA_1 \parallel BB_1$. Следовательно, четырёхугольник AA_1B_1B – параллелограмм. Отсюда $AB = A_1B_1$. ◄

Задача 2. Постройте сечение четырёхугольной пирамиды $EABCD$ плоскостью, проходящей через точку M ребра EC параллельно плоскости ABE.

Решение. Секущую плоскость и плоскость ABE пересекает плоскость BEC (рис. 6.10). По теореме 6.3 плоскость BEC пересекает указанные плоскости по параллельным прямым. Тогда в плоскости BEC проведём через точку M прямую, параллельную прямой BE. Получаем точку N – точку пересечения проведённой прямой и прямой BC. Таким образом, секущая плоскость пересекает грань BEC по отрезку MN.

Рис. 6.9

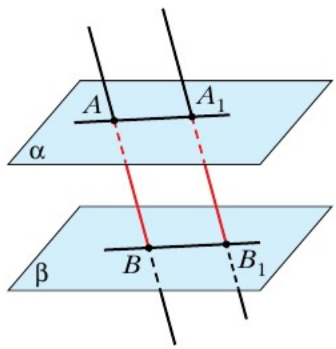
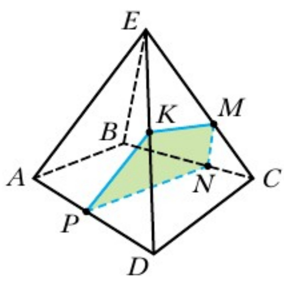


Рис. 6.10



Аналогично можно установить, что секущая плоскость пересекает грань $ABCD$ по отрезку PN (где $PN \parallel AB$, точка P принадлежит ребру AD), а грань AED – по отрезку PK (где $PK \parallel AE$, точка K принадлежит ребру DE). Точки K и M принадлежат грани DEC и секущей плоскости. Соединим точки K и M отрезком. То, что четырёхугольник $MNPK$ – искомое сечение, следует из построения.

Заметим, что обосновать параллельность плоскостей ABE и PNM можно, опираясь и на признак параллельности двух плоскостей. Действительно, $AB \parallel PN$ и $BE \parallel NM$. Поэтому плоскости ABE и PNM параллельны. ◄

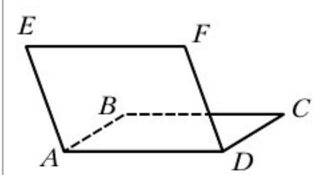
1. Какие плоскости называют параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
3. В каких случаях говорят, что два многоугольника параллельны?
4. Сформулируйте теоремы, выражающие свойства параллельных плоскостей.

Упражнения

6.1. Верно ли утверждение:
1) если две плоскости параллельны, то любая прямая одной плоскости параллельна любой прямой другой плоскости;
2) если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой другой плоскости, то данные плоскости параллельны;
3) если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны соответственно двум прямым, лежащим в другой плоскости, то данные плоскости параллельны?

6.2. Параллелограммы $ABCD$ и $AEFD$ не лежат в одной плоскости (рис. 6.11). Докажите, что плоскости ABE и DCF параллельны.

Рис. 6.11



6.3. Точки M, N и K – середины рёбер AB, AC и AD тетраэдра $DABC$. Докажите, что плоскости MNK и BCD параллельны.

6.4. На рёбрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F и K так, что $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Докажите, что плоскости EFK и ABC параллельны.

6.5. Две диагонали правильного шестиугольника параллельны плоскости α. Можно ли утверждать, что плоскость данного шестиугольника параллельна плоскости α?

6.6. Можно ли утверждать, что плоскость α параллельна плоскости трапеции, если плоскость α параллельна:
1) основаниям трапеции;
2) боковым сторонам трапеции?

6.7. Верно ли утверждение:
1) если прямые пересечения двух плоскостей третьей плоскостью параллельны, то данные плоскости параллельны;
2) если отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя плоскостями, равны, то данные плоскости параллельны?

6.8. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки C и D, а в плоскости β – точки C_1 и D_1, такие, что прямые CC_1 и DD_1 параллельны. Найдите отрезки DD_1 и C_1D_1, если $CD = 12$ см, $CC_1 = 4$ см.

6.9. Треугольник ABC лежит в плоскости α. Через его вершины проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β, параллельную плоскости α, в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

6.10. Даны параллельные плоскости α и β. Отрезок AB и точка C лежат в плоскости α, точка D – в плоскости β (рис. 6.12). Постройте линию пересечения: 1) плоскости β и плоскости ABD; 2) плоскости β и плоскости BCD.

6.11. Даны параллельные плоскости α и β. Точки M и N лежат в плоскости α, точки K и P – в плоскости β (рис. 6.13). Постройте линию пересечения:

1) плоскости α и плоскости MKP;
2) плоскости β и плоскости MNK.

Рис. 6.12

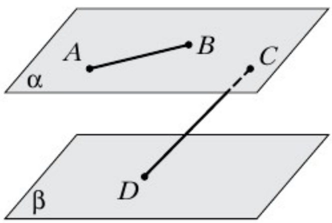
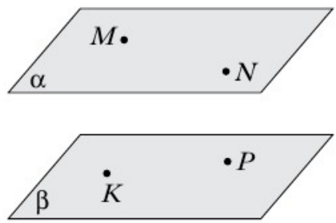


Рис. 6.13



6.12. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону BA угла ABC в точках A_1 и A_2 соответственно, а сторону BC – в точках C_1 и C_2 соответственно. Найдите:

1) отрезок A_1C_1, если $A_2C_2 = 36$ см, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) отрезок C_1C_2, если $A_1C_1 = 14$ см, $A_2C_2 = 21$ см, $BC_1 = 12$ см.

6.13. Плоскости α и β параллельны. Точки A и B лежат в плоскости α, точки C и D – в плоскости β. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O.

1) Докажите, что $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD}$.
2) Найдите отрезок AB, если $CD = 32$ см, $AC : AO = 7 : 3$.

6.14. Отрезки AB, CD и EF, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого из этих отрезков. Докажите, что плоскости ACE и BDF параллельны.

6.15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ACB_1 и A_1C_1D параллельны.

6.16. На ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 2$ (рис. 6.14). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости ACC_1. Найдите периметр полученного сечения, если ребро куба равно a.

6.17. Точка M – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.15). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости A_1BC. Найдите периметр полученного сечения, если ребро куба равно a.

Рис. 6.14

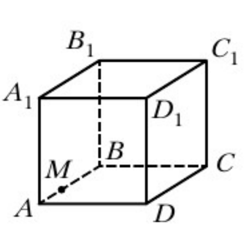


Рис. 6.15

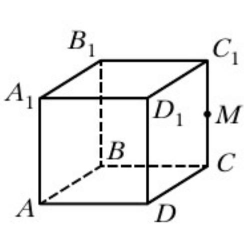
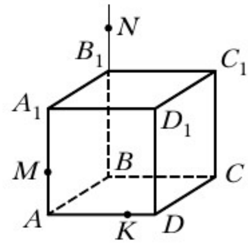


Рис. 6.16



6.18. На рёбрах AA_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и K, а на продолжении ребра BB_1 за точку B_1 – точку N (рис. 6.16). Постройте сечение куба плоскостью MNK.

6.19. На рёбрах AB и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки E и F, а на продолжении ребра B_1C_1 за точку C_1 – точку K (рис. 6.17). Постройте сечение куба плоскостью EFK.

6.20. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте линию пересечения плоскостей BDD_1 и CC_1M.

6.21. Точка E принадлежит ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте линию пересечения плоскостей ACC_1 и BED.

6.22. Точка K принадлежит грани BCD тетраэдра $DABC$ (рис. 6.18). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K параллельно плоскости ABD.

Рис. 6.17

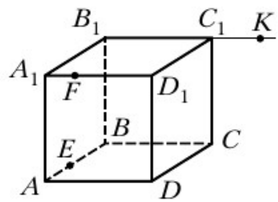
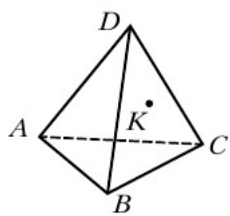
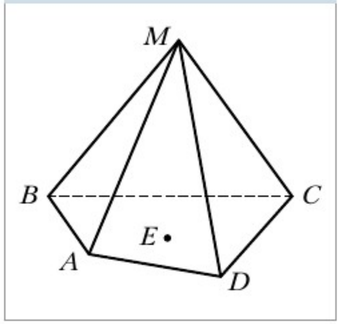


Рис. 6.18



6.23. Точка E принадлежит основанию $ABCD$ пирамиды $MABCD$ (рис. 6.19). Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости CMD.

Рис. 6.19



6.24. Плоскость α параллельна плоскости β, плоскость β параллельна плоскости γ (α и γ – разные плоскости). Докажите, что плоскости α и γ параллельны.

6.25. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

6.26. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то любая прямая, проходящая через точку плоскости α и параллельная плоскости β, лежит в плоскости α.

6.27. Прямая a и основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в плоскости α (рис. 6.20). На ребре AD отметили точку E, на ребре CC_1 – точку F. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой a и проходящей через точки E и F.

6.28. Прямая a и основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в плоскости α (рис. 6.21). На ребре AB отметили точку E, на ребре C_1D_1 – точку F. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой a и проходящей через точки E и F.

Рис. 6.20

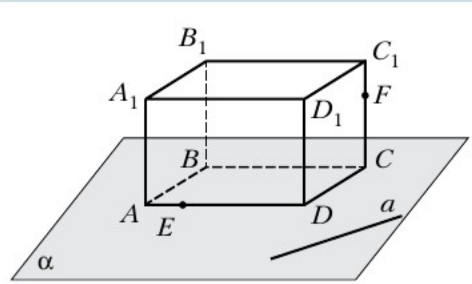
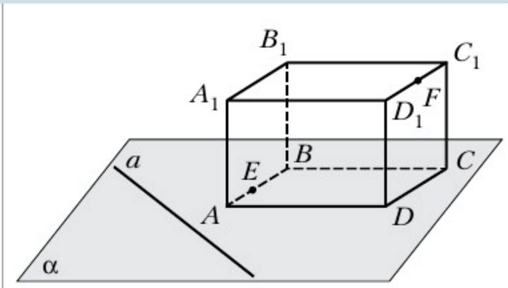


Рис. 6.21



6.29. На рёбрах AD, CD и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки E, F и K (рис. 6.22). Постройте сечение куба плоскостью EFK.

6.30. На рёбрах AA_1, A_1B_1 и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M, N и K (рис. 6.23). Постройте сечение куба плоскостью MNK.

6.31. Точки A, B, C, D, E, F таковы, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ и $AB \neq DE$. Докажите, что данные шесть точек принадлежат одной плоскости.

6.32. На ребре AD и диагонали CA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BC_1D. Найдите отношение $CN : NA$, если известно, что $AM : MD = 1 : 4$.

Упражнения для повторения

6.33. На рисунке 6.24 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 6$ см, $A_1A_3 = 15$ см. Найдите отрезок A_1A_2.

6.34. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезке OC отметили точку M так, что $CM : MO = 1 : 2$. Найдите $\operatorname{tg} \angle BMO$.

Рис. 6.22

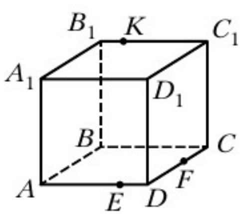


Рис. 6.23

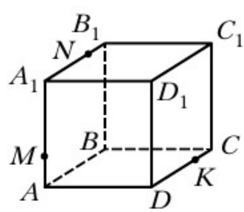
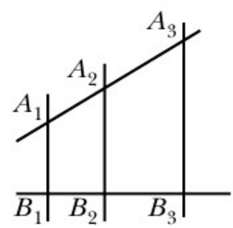


Рис. 6.24



§ 7. Преобразования фигур в пространстве. Параллельное проектирование

В планиметрии вы рассматривали преобразования фигур на плоскости. Аналогично определяют преобразования фигур в пространстве.

Пусть в пространстве задана некоторая фигура F. Каждой точке фигуры F поставим в соответствие (сопоставим) по определённому правилу единственную точку пространства. Все сопоставленные точки образуют некоторую фигуру F_1 (рис. 7.1). Говорят, что **фигура F_1 получена в результате преобразования фигуры F**. При этом фигуру F_1 называют **образом фигуры** F, а фигуру F называют **прообразом фигуры** F_1.

Рассмотрим примеры преобразований фигур.

Все точки тетраэдра $DABC$ сместили в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. В результате такого преобразования тетраэдра $DABC$ получили тетраэдр $D_1A_1B_1C_1$ (рис. 7.2). Мы привели пример преобразования фигуры, которое называют **параллельным переносом в пространстве** (с параллельным переносом на плоскости вы уже знакомились в 9 классе). Более подробно с параллельным переносом вы ознакомитесь в теме «Векторы в пространстве».

Рис. 7.1

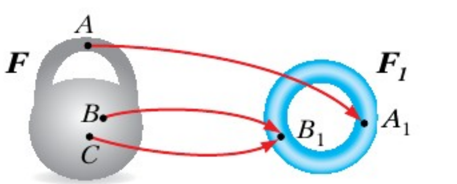
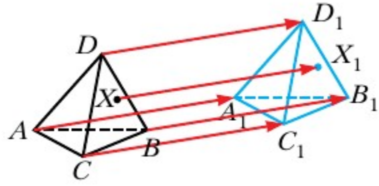
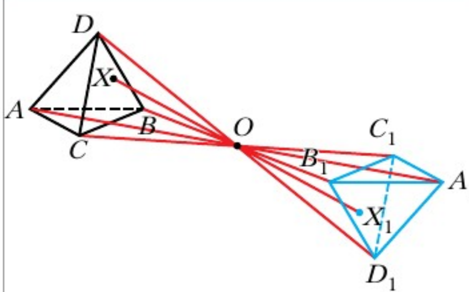


Рис. 7.2



Каждой точке X тетраэдра $DABC$ поставили в соответствие симметричную ей относительно точки O точку X_1. В результате такого преобразования тетраэдра $DABC$ получили тетраэдр $D_1A_1B_1C_1$ (рис. 7.3). Мы привели пример преобразования фигуры в пространстве, которое называют **симметрией относительно точки** или **центральной симметрией**.

Рис. 7.3



Определение

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между её точками, называют движением фигуры F.

Вы знаете, что в планиметрии параллельный перенос и центральная симметрия являются движениями. Этим же свойством указанные преобразования обладают и в стереометрии.

Например, докажем, что центральная симметрия является движением. Пусть A и B – произвольные точки фигуры F. Точки A_1 и B_1 – соответственно их образы при центральной симметрии относительно точки O (рис. 7.4).

Пересекающиеся прямые AA_1 и BB_1 определяют некоторую плоскость α. В этой плоскости треугольники ABO и A_1B_1O равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = A_1B_1$.

Определение

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре.

Точку O называют **центром симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии**.

Приведём примеры пространственных фигур, имеющих центр симметрии. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка пересечения отрезков DB_1 и BD_1 является его центром симметрии (рис. 7.5). Этот факт будет доказан в § 20. Центр шара является его центром симметрии (рис. 7.6).

Рис. 7.4

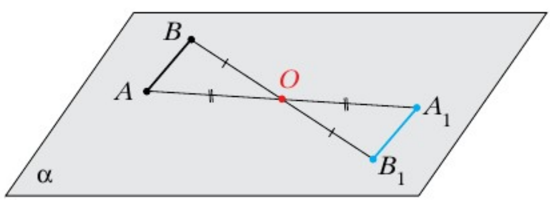
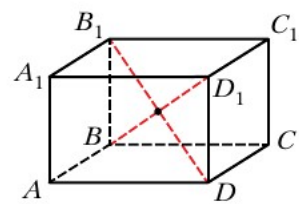


Рис. 7.5



Примеры проявления центральной симметрии в природе показаны на рисунке 7.7. Детали, имеющие центр симметрии, часто используют в технике (рис. 7.8).

Рис. 7.6

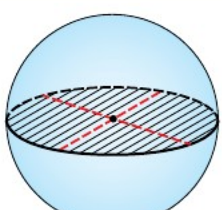


Рис. 7.7

Рис. 7.8



Определение

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой фигуры.

Например, на каждом из рисунков 7.2 и 7.3 изображены равные пирамиды.

Можно показать, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то существует движение, при котором один из треугольников является образом другого. Поэтому такие треугольники равны.

Это означает, что в стереометрии можно применять первый признак равенства треугольников.

Аналогичные утверждения также верны для второго и третьего признаков равенства треугольников.

Определение

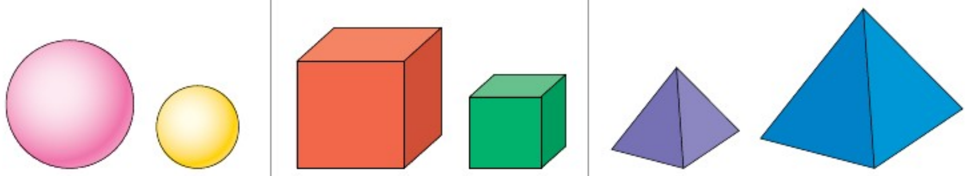
Преобразование фигуры F, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, называют преобразованием подобия фигуры F.

Если при преобразовании подобия образом фигуры F является фигура F_1, то фигуры F и F_1 называют **подобными**.

Среди знакомых вам пространственных фигур подобными являются два куба, два шара, два тетраэдра, все грани которых – равносторонние треугольники (рис. 7.9).

Из курса планиметрии вам знакомы три признака подобия треугольников. Можно показать, что эти признаки применимы и в том случае, когда треугольники лежат в разных плоскостях.

Рис. 7.9



Нередко в повседневной жизни мы встречаемся с явлениями и процессами, служащими примерами преобразований, при которых образом пространственной фигуры является плоская фигура. Увидеть пример такого рода можно в солнечную погоду, когда предмет отбрасывает тень на плоскую поверхность (рис. 7.10). Этот пример иллюстрирует преобразование фигуры, которое называют **параллельным проектированием**. С помощью этого преобразования на плоскости создают изображения пространственных фигур.

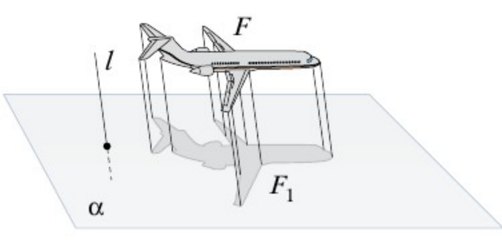
Многие рисунки вашего учебника, на которых изображены пространственные фигуры, можно рассматривать как тени, отбрасываемые на плоскость страницы предметами, освещёнными параллельными лучами.

Познакомимся подробнее с параллельным проектированием.

Пусть даны плоскость α, прямая l, пересекающая эту плоскость, и фигура F (рис. 7.11). Через каждую точку фигуры F проведём прямую, параллельную прямой l (если точка фигуры F принадлежит прямой l, то в качестве проведённой прямой будем рассматривать саму прямую l). Точки пересечения всех проведённых прямых с плоскостью α образуют некоторую фигуру F_1. Описанное преобразование фигуры F называют **параллельным проектированием**. Фигуру F_1 называют **параллельной проекцией фигуры F на плоскость α в направлении прямой l**. Также фигуру

Рис. 7.10

Рис. 7.11



F_1 называют **изображением фигуры F на плоскости α в направлении прямой l**.

С помощью параллельного проектирования, выбирая выгодные положения плоскости α и прямой l, можно получить наглядное изображение данной фигуры F. Это связано с тем, что параллельное проектирование обладает целым рядом замечательных свойств (см. теоремы 7.1–7.3). Благодаря этим свойствам при рассмотрении изображения фигуры создаются зрительные образы, похожие на те, которые возникают при рассмотрении самой фигуры.

Пусть даны плоскость α и прямая l, пересекающая эту плоскость.

Если прямая параллельна прямой l, то её проекцией на плоскость α является точка (рис. 7.12). Проекцией прямой l также является точка.

Если отрезок параллелен прямой l или лежит на прямой l, то его проекцией на плоскость α является точка (см. рис. 7.12).

В следующих теоремах будем рассматривать прямые и отрезки, не параллельные прямой l и не лежащие на ней.

Теорема 7.1

Параллельной проекцией прямой является прямая; параллельной проекцией отрезка является отрезок (рис. 7.13)**.**

Рис. 7.12

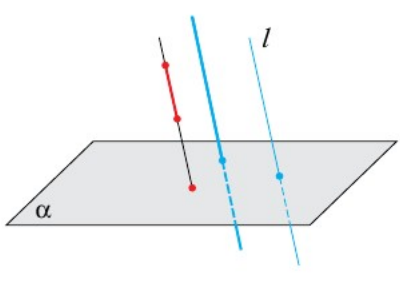
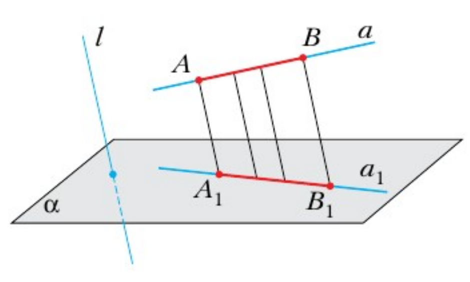
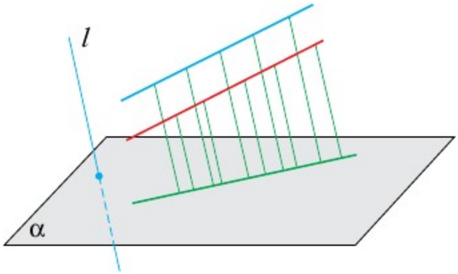
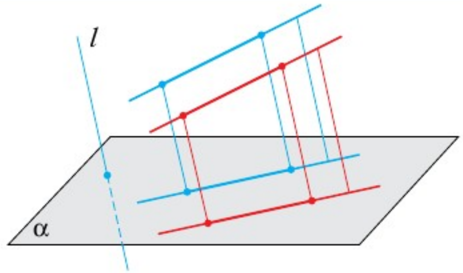


Рис. 7.13



Теорема 7.2

Параллельной проекцией двух параллельных прямых являются или прямая (рис. 7.14)**, или две параллельные прямые** (рис. 7.15)**. Параллельные проекции двух параллельных отрезков лежат на одной прямой или на параллельных прямых.**

Рис. 7.14	Рис. 7.15
	

Теорема 7.3

Отношение параллельных проекций отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, равно отношению самих отрезков (рис. 7.16).

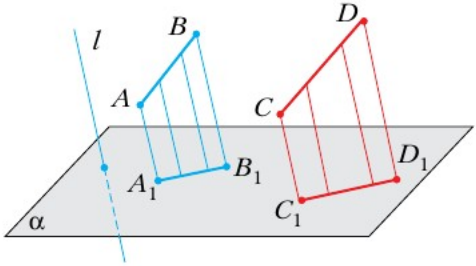
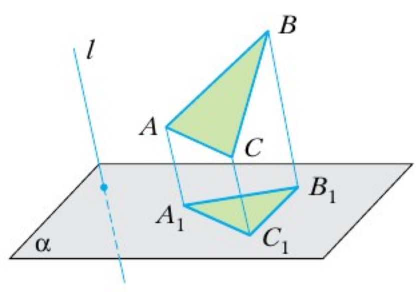
С доказательством этих теорем вы можете ознакомиться далее на с. 75–79.

Рассмотрим изображения некоторых многоугольников на плоскости α в направлении прямой l.

Если прямая l параллельна плоскости многоугольника или лежит в этой плоскости, то изображением многоугольника является отрезок.

Теперь рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость многоугольника.

Используя свойства параллельного проектирования, можно показать, что параллельной проекцией треугольника является треугольник (рис. 7.17).

Рис. 7.16	Рис. 7.17
 $\dfrac{A_1B_1}{C_1D_1} = \dfrac{AB}{CD}$	

При параллельном проектировании величины углов и отношения отрезков, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому, например, изображением равнобедренного и равностороннего треугольников может быть разносторонний треугольник, а изображением прямоугольного треугольника – как тупоугольный треугольник, так и остроугольный.

Поскольку при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков, то изображением параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) является параллелограмм (рис. 7.18).

Также из свойств параллельного проектирования следует, что изображением трапеции является трапеция. Однако вид трапеции (равнобокая, прямоугольная) может не сохраняться.

Параллельной проекцией окружности является фигура, которую называют **эллипсом** (рис. 7.19). Изображение центра окружности называют **центром эллипса**.

Рис. 7.18

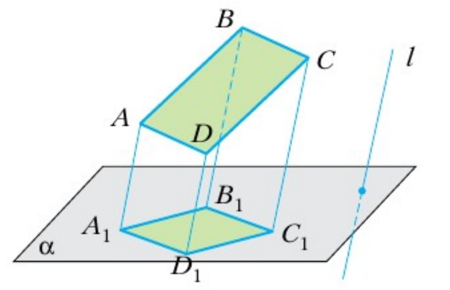
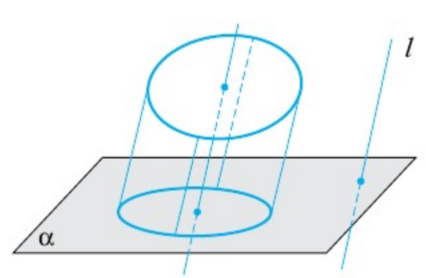


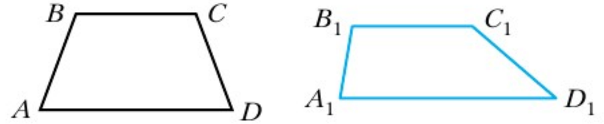
Рис. 7.19



Задача. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Постройте изображение высоты трапеции $ABCD$, проведённой из вершины B.

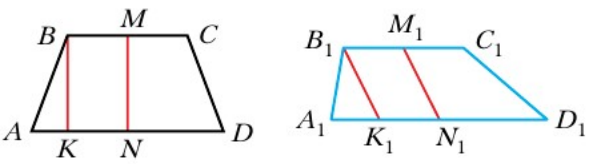
Решение. На рисунке 7.20 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и её параллельная проекция – трапеция $A_1B_1C_1D_1$.

Рис. 7.20



Пусть точки M и N – середины оснований трапеции $ABCD$, BK – высота трапеции (рис. 7.21). Из свойств равнобокой трапеции следует, что $MN \parallel BK$. Из теоремы 7.3 следует, что параллельной проекцией середины отрезка является середина его параллельной проекции. Тогда изображением отрезка MN является отрезок M_1N_1, где точки M_1 и N_1 – середины соответственно оснований B_1C_1 и A_1D_1 трапеции $A_1B_1C_1D_1$.

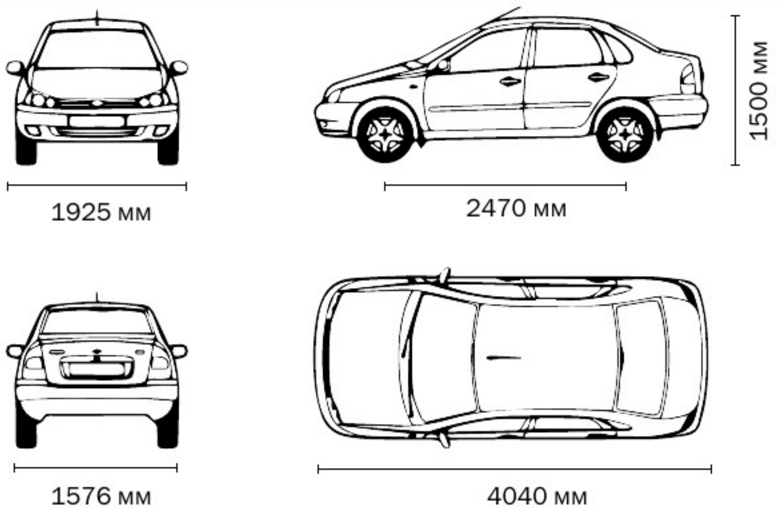
Рис. 7.21



Поскольку $BK \parallel MN$, то параллельной проекцией высоты BK является отрезок B_1K_1, параллельный отрезку M_1N_1 (см. рис. 7.21). ◄

Изображения объектов с помощью параллельного проектирования широко используются в самых разных областях промышленности, например в автомобилестроении (рис. 7.22).

Рис. 7.22



1. Опишите, в каком случае говорят, что фигура F_1 получена в результате преобразования фигуры F.

2. Опишите преобразование фигуры, которое называют параллельным переносом.
3. Опишите преобразование фигуры, которое называют центральной симметрией.
4. Какое преобразование фигуры называют движением?
5. Какие фигуры называют равными?
6. Опишите преобразование фигуры, которое называют параллельным проектированием.
7. Сформулируйте теоремы, выражающие свойства параллельного проектирования.

Упражнения

7.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.23). При некотором параллельном переносе образом точки A является точка A_1. Какая фигура является при данном параллельном переносе образом: 1) точки D; 2) отрезка AB; 3) отрезка BC; 4) отрезка AC?

7.2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 7.23). При некотором параллельном переносе образом отрезка BB_1 является отрезок CC_1. Образом какой фигуры при данном параллельном переносе является: 1) точка D; 2) отрезок D_1C; 3) грань CC_1D_1D?

7.3. Фигура состоит из трёх точек. Из какого количества точек может состоять параллельная проекция этой фигуры?

7.4. Может ли параллельной проекцией двух пересекающихся прямых быть: 1) две пересекающиеся прямые; 2) параллельные прямые; 3) одна прямая; 4) прямая и точка вне её?

7.5. Какая геометрическая фигура не может быть параллельной проекцией двух скрещивающихся прямых:
1) две параллельные прямые;
2) две пересекающиеся прямые;
3) прямая и точка на ней;
4) прямая и точка вне её?

7.6. 1) Могут ли равные отрезки служить параллельными проекциями неравных отрезков?
2) Могут ли неравные отрезки служить параллельными проекциями равных отрезков?
3) Может ли параллельная проекция отрезка быть больше данного отрезка?
4) Может ли параллельная проекция прямой быть параллельной данной прямой?

7.7. Может ли фигура, изображённая на рисунке 7.24, быть параллельной проекцией треугольника?

7.8. Может ли параллельной проекцией трапеции быть четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, углы A_1, B_1, C_1 и D_1 которого соответственно равны:
1) $10°$, $40°$, $140°$, $170°$; 2) $50°$, $130°$, $50°$, $130°$?

7.9. Может ли параллельной проекцией параллелограмма быть четырёхугольник со сторонами:
1) 6 см, 8 см, 6 см, 9 см; 2) 12 см, 12 см, 12 см, 12 см?

7.10. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является изображением прямоугольника $ABCD$ (рис. 7.25). Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей прямоугольника на сторону BC.

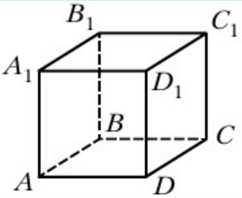


Рис. 7.23

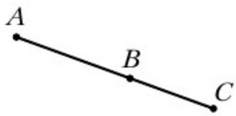


Рис. 7.24

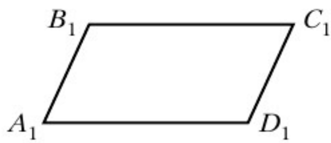


Рис. 7.25

7.11. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB (рис. 7.26). Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из середины гипотенузы на катет AC.

7.12. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), точка M_1 – изображение некоторой точки M отрезка AB (рис. 7.27). Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на основание AC.

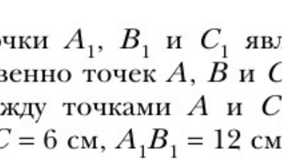


Рис. 7.26

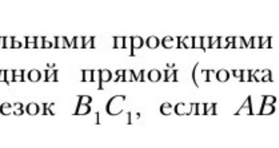


Рис. 7.27

7.13. Точки A_1, B_1 и C_1 являются параллельными проекциями соответственно точек A, B и C, лежащих на одной прямой (точка B лежит между точками A и C). Найдите отрезок B_1C_1, если $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см.

7.14. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением правильного треугольника ABC (рис. 7.28). Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC.

7.15. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является изображением квадрата $ABCD$ (рис. 7.29). Постройте изображение осей симметрии данного квадрата.

7.16. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O (рис. 7.30). Постройте изображение какого-либо прямоугольного треугольника, вписанного в данную окружность.

Рис. 7.28

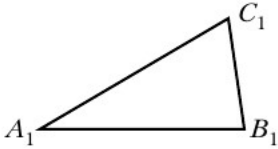


Рис. 7.29

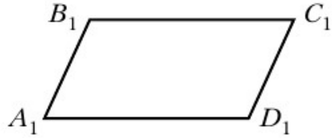
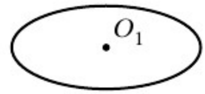


Рис. 7.30



7.17. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O (см. рис. 7.30). Постройте изображение какого-либо прямоугольника, вписанного в данную окружность.

7.18. Эллипс с центром O_1 и отрезок A_1B_1 являются изображением окружности с центром O и её хорды AB (рис. 7.31). Постройте изображение диаметра данной окружности, перпендикулярного хорде AB.

7.19. На рисунке 7.32 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на ребре CD которого отметили точку M. Постройте образ данного куба при симметрии относительно:

1) вершины B_1; 2) точки M.

7.20. На рисунке 7.33 изображён тетраэдр $DABC$, на ребре AB которого отметили точку M. Постройте образ данного тетраэдра при симметрии относительно:

1) вершины A; 2) точки M.

Рис. 7.31

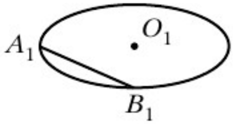


Рис. 7.32

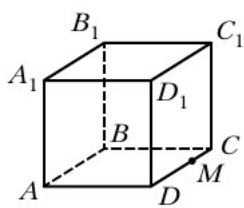
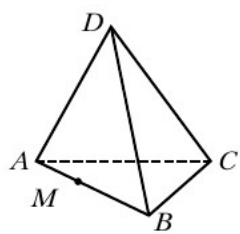


Рис. 7.33



7.21. На рисунке 7.34 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте образ данного куба при параллельном переносе, в результате которого:
1) образом точки A является точка D;
2) образом точки B является точка C_1.

7.22. На рисунке 7.35 изображён тетраэдр $DABC$, точка M – середина ребра BC. Постройте образ данного тетраэдра при параллельном переносе, в результате которого:
1) образом точки D является точка B;
2) образом точки A является точка M.

7.23. Докажите, что если отрезок параллелен плоскости проектирования, то его параллельной проекцией является отрезок, равный данному.

7.24. Докажите, что если фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проектирования, то её параллельной проекцией является фигура, равная данной.

7.25. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение треугольника ABC. Постройте изображение биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B, если $AB : BC = 1 : 2$.

7.26. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AB : AC = 5 : 4$.

7.27. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC, если высота AM этого треугольника делит сторону BC на отрезки BM и MC так, что $BM = 5MC$.

7.28. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение треугольника ABC (рис. 7.36), отрезки A_1D_1 и C_1E_1 – изображения соответственно высот AD и CE треугольника ABC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC.

Рис. 7.34

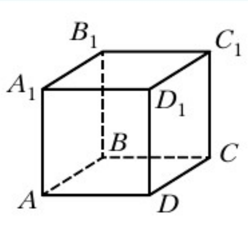


Рис. 7.35

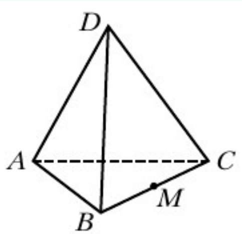
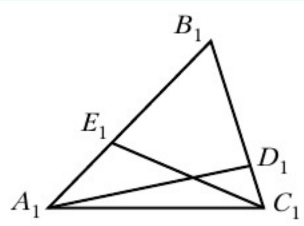


Рис. 7.36



7.29. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ – изображение ромба $ABCD$. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей ромба на сторону AD, если $\angle A = 60°$.

7.30. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ – изображение ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Постройте изображение высоты ромба, проведённой из вершины A к стороне BC.

7.31. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение треугольника ABC. Постройте изображение квадрата $DEFM$, вписанного в треугольник ABC, если $D \in AB$, $M \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$.

7.32. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB. Постройте изображение квадрата, стороной которого является отрезок AB, если этот квадрат лежит в плоскости ABC и расположен вне треугольника ABC.

7.33. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O (рис. 7.37), отрезок A_1B_1 – изображение диаметра AB данной окружности. Постройте изображение диаметра, перпендикулярного диаметру AB.

7.34. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O, точка A_1 – изображение точки A окружности (рис. 7.38). Постройте изображение касательной к данной окружности, проходящей через точку A.

Рис. 7.37

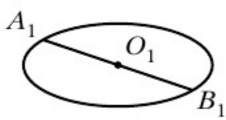
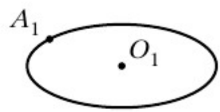


Рис. 7.38



7.35. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением прямоугольного треугольника ABC, отрезок A_1B_1 – изображением его гипотенузы AB. Постройте изображение биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B, если $\angle A = 30^\circ$.

7.36. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O. Постройте изображение правильного треугольника:

1) вписанного в данную окружность;

2) описанного около данной окружности.

7.37. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O. Постройте изображение квадрата:

1) вписанного в данную окружность;

2) описанного около данной окружности.

7.38. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, каждая диагональ которого параллельна некоторой стороне?

Упражнения для повторения

7.39. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $AD = 2\sqrt{3}$ см. Найдите угол между прямыми AC и BD.

7.40. В треугольнике ABC известно, что $AB = 13$ см, $BC = 5\sqrt{2}$ см, $AC = 7$ см. Найдите угол между прямыми AC и BC.

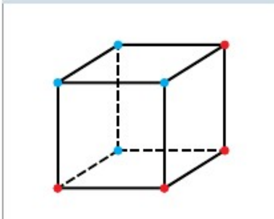
Когда сделаны уроки

Спроектируем на плоскость

Выполняя те или иные преобразования в пространстве, можно из одних геометрических фигур получать другие. Например, используя параллельное проектирование, можно прямую преобразовать в точку, квадрат — в отрезок или в параллелограмм. При этом может оказаться, что сложные и неочевидные свойства геометрических фигур трансформируются в более простые и наглядные. Это соображение является источником важного и очень красивого метода решения геометрических задач. Продемонстрируем сказанное на примерах.

Задача 1. Можно ли на плоскости разместить восемь точек и покрасить четыре из них в красный цвет, а оставшиеся четыре — в синий так, чтобы для любых трёх точек одного цвета нашлась точка другого цвета и эти четыре точки являлись вершинами параллелограмма?

Рис. 7.39



Решение. Рассмотрим параллельную проекцию куба на плоскость (рис. 7.39). Покрасим полученные проекции вершин куба так, как показано на рисунке. Ясно, что покрашенные точки удовлетворяют условию задачи. ◄

Задача 2. В правильном пятиугольнике все диагонали точками пересечения делятся в одном и том же отношении $1 : \lambda : 1$ (рис. 7.40)*. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, все диагонали которого точками пересечения также делятся в отношении $1 : \lambda : 1$?

Решение. Такой пятиугольник существует. Рассмотрим параллельное проектирование, при котором правильный пятиугольник $ABCDE$ спроектировался в пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, отличный от правильного

* Можно доказать, что $\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Рис. 7.40

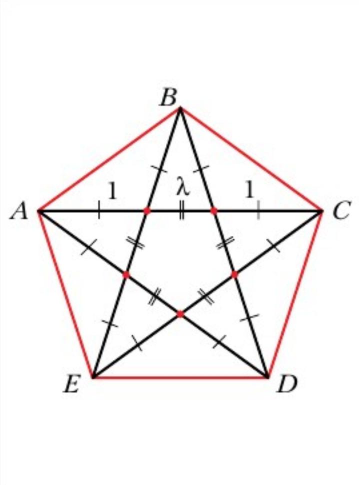
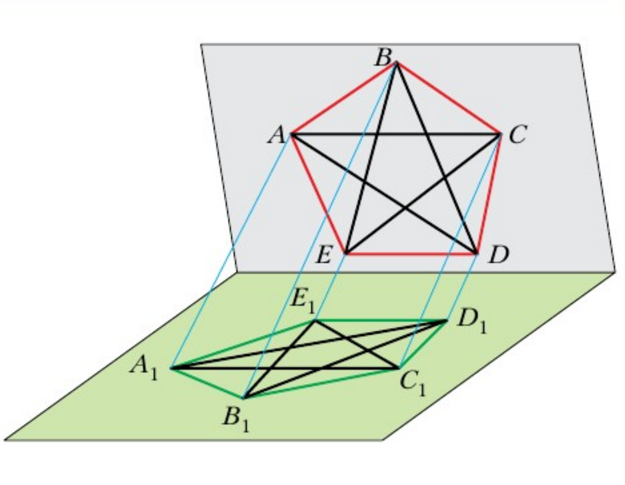


Рис. 7.41



(рис. 7.41). При параллельном проектировании сохраняются отношения отрезков, лежащих на одной прямой. Поэтому отношения, в которых точками пересечения делятся диагонали правильного пятиугольника и его параллельной проекции, равны. ◂

Задача 3. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Точки деления соединены с вершинами треугольника так, как показано на рисунке 7.42. Докажите, что диагонали KN, LO и MP образованного шестиугольника $KLMNOP$ пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим параллельное проектирование, при котором изображением данного треугольника ABC является правильный треугольник. Для этого через сторону AB проведём плоскость, отличную от плоскости треугольника ABC, в которой рассмотрим правильный треугольник ABD (рис. 7.43). Если за направление проектирования взять прямую CD, то данный треугольник ABC спроектируется в правильный треугольник ABD.

Поскольку при параллельном проектировании сохраняются отношения отрезков, лежащих на одной прямой, то утверждение, сформулированное в условии задачи для шестиугольника $KLMNOP$, достаточно доказать для его проекции (рис. 7.44). Прямые, содержащие высоты правильного треугольника ABD (рис. 7.45), являются его осями симметрии. В силу указанных симметрий рассматриваемые диагонали шестиугольника принадлежат высотам треугольника ABD, а значит, пересекаются в одной точке. ◂

Рис. 7.42

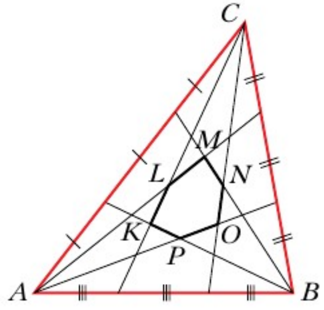


Рис. 7.43

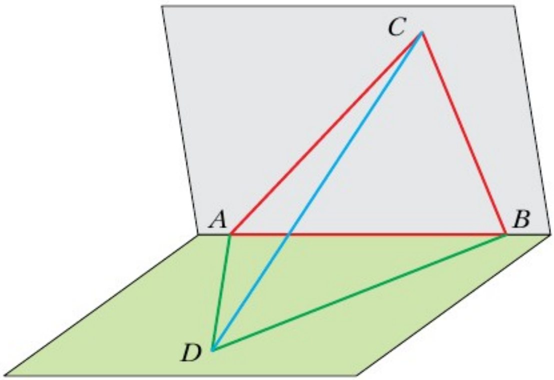


Рис. 7.44

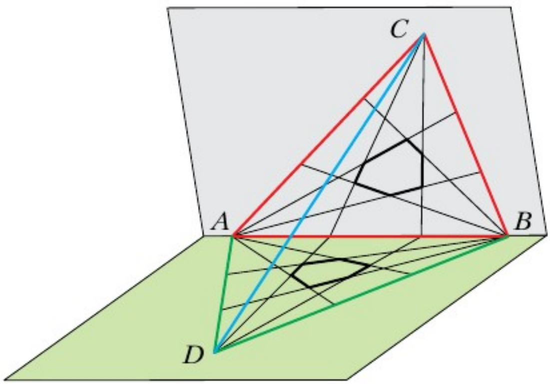
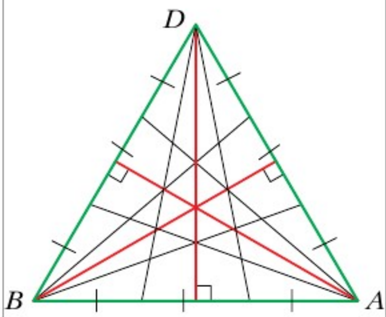


Рис. 7.45



При решении этих задач мы использовали утверждения о свойствах параллельного проектирования, сформулированные в параграфе 7 в виде теорем 7.1–7.3. Докажем эти теоремы.

Доказательство теоремы 7.1

Пусть прямая l, задающая направление проектирования, не параллельна прямой a и не совпадает с ней. Докажем, что параллельной проекцией прямой a является прямая, а проекцией отрезка, лежащего на прямой a, является отрезок.

Через каждую точку прямой a проведём прямую, параллельную прямой l. Например, на рисунке 7.46 точка A_1 является параллельной проекцией точки A и прямая AA_1 параллельна прямой l. Согласно ключевой задаче § 4 все проведённые прямые лежат в одной плоскости β (рис. 7.47). Поскольку плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1, то это означает, что параллельная проекция каждой точки прямой a принадлежит прямой a_1. Верно и обратное утверждение, т. е. каждая точка прямой a_1 является параллельной проекцией некоторой точки прямой a.

Рис. 7.46

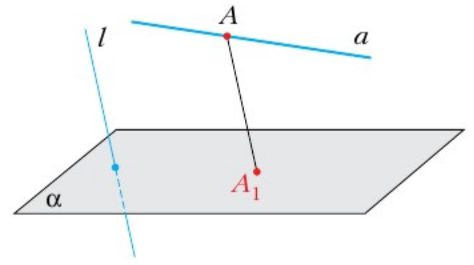
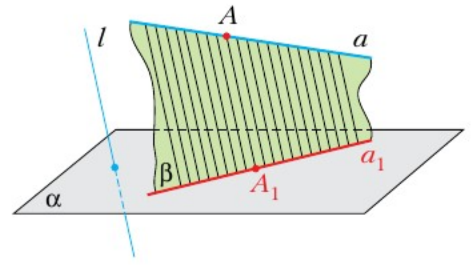


Рис. 7.47



Действительно, если через произвольную точку Y прямой a_1 в плоскости β провести прямую, параллельную прямой AA_1 (рис. 7.48), то она пересечёт прямую a в некоторой точке X, причём точка Y будет являться параллельной проекцией точки X на плоскость α.

Таким образом, мы показали, что параллельная проекция каждой точки прямой a принадлежит прямой a_1 и каждая точка прямой a_1 является параллельной проекцией некоторой точки прямой a. Это означает, что параллельной проекцией прямой является прямая.

Докажем теперь, что параллельной проекцией отрезка AB является отрезок (рис. 7.49). Пусть точки A_1 и B_1 являются соответственно параллельными проекциями точек A и B. Если в плоскости β через все точки отрезка AB провести прямые, параллельные прямой AA_1, то эти прямые будут пересекать прямую A_1B_1 в точках, принадлежащих отрезку A_1B_1, и через каждую точку отрезка A_1B_1 пройдёт одна из проведённых прямых. ◄

Доказательство теоремы 7.2

Пусть прямая l, задающая направление проектирования, не параллельна данным параллельным прямым a и b. Докажем, что параллельной проекцией прямых a и b является или прямая, или две параллельные прямые.

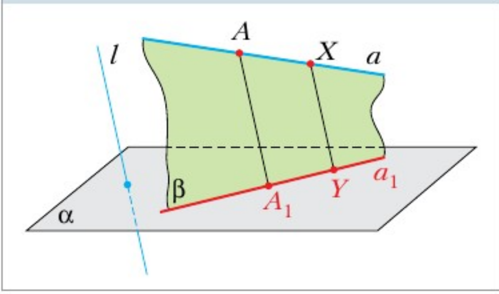


Рис. 7.48

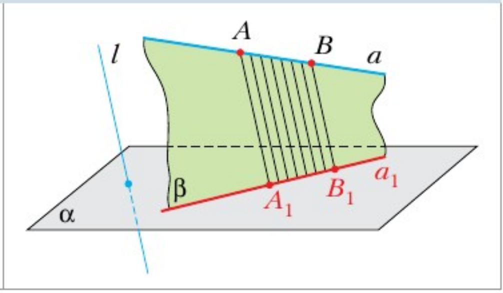


Рис. 7.49

Проведём через параллельные прямые a и b плоскость γ. Тогда прямая l или лежит в этой плоскости, или является ей параллельной, или пересекает её.

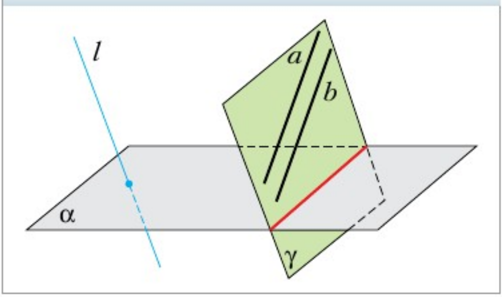


Рис. 7.50

В первых двух указанных случаях параллельной проекцией прямых a и b на плоскость α является прямая пересечения плоскостей α и γ (рис. 7.50).

Рассмотрим теперь случай, когда прямая l пересекает плоскость γ. Пусть прямые a_1 и b_1 являются параллельными проекциями прямых a и b на плоскость α, при этом точка A прямой a проектируется в точку A_1, а точка B прямой b проектируется в точку B_1 (рис. 7.51). Ясно, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости, которую обозначим β_a. Аналогично прямые b и b_1 лежат в одной плоскости, которую обозначим β_b (рис. 7.52). Пересекающиеся прямые a и AA_1, лежащие

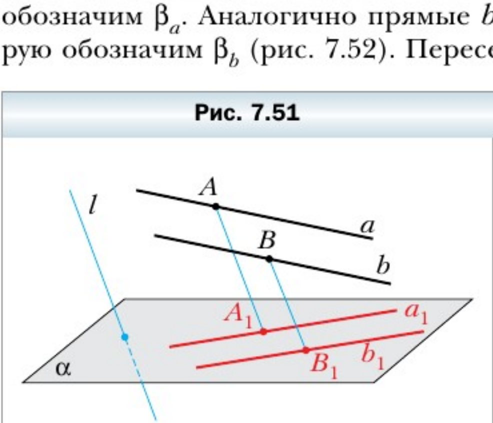


Рис. 7.51

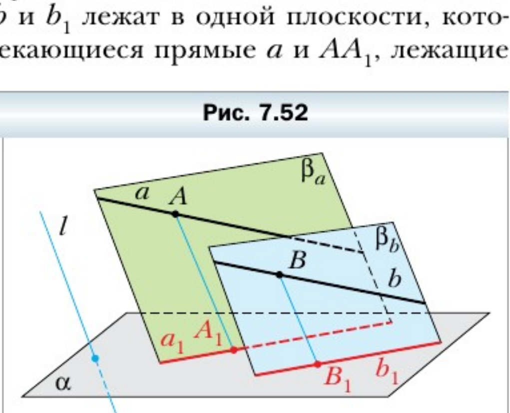


Рис. 7.52

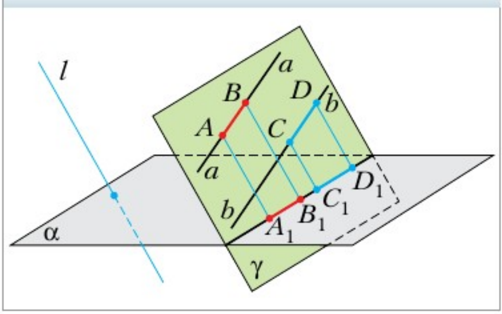
в плоскости β_a, параллельны соответственно прямым b и BB_1, лежащим в плоскости β_b. Это означает, что плоскости β_a и β_b являются параллельными. По теореме 6.3 плоскость α пересекает две параллельные плоскости β_a и β_b по параллельным прямым. Поэтому прямые a_1 и b_1 являются параллельными. ◄

Доказательство теоремы 7.3

Пусть прямая l, задающая направление проектирования, не параллельна отрезкам AB и CD, лежащим на одной прямой или на параллельных прямых, и не содержит эти отрезки. Докажем, что отношение параллельных проекций отрезков AB и CD равно отношению самих отрезков.

Проведём через прямые AB и CD плоскость γ. В случае когда прямая l лежит в плоскости γ или параллельна ей, отрезки AB и CD, а также их параллельные проекции будут лежать в одной плоскости γ (рис. 7.53). Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы о пропорциональных отрезках, доказанной в курсе планиметрии (проведите эти рассуждения самостоятельно).

Рис. 7.53



Рассмотрим теперь случай, когда прямая l пересекает плоскость γ. Пусть отрезки A_1B_1 и C_1D_1 являются параллельными проекциями отрезков AB и CD (рис. 7.54). Пусть отрезки AD и BC пересекаются в точке O и точка O_1 – параллельная проекция точки O (рис. 7.55). Из теоремы 7.2 следует, что прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, а значит, треугольники $A_1B_1O_1$ и $D_1C_1O_1$ подобны. Поэтому

Рис. 7.54

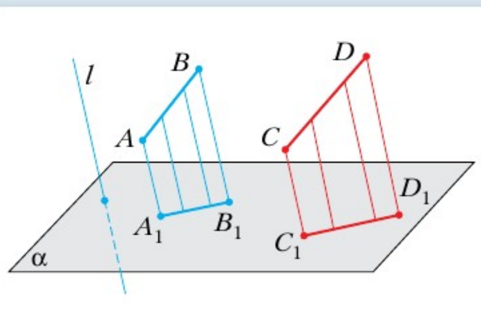
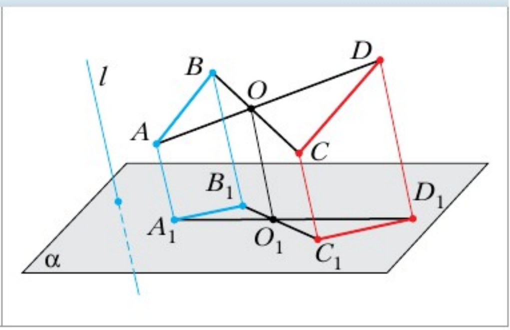


Рис. 7.55



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_1O_1}{O_1D_1}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

В то же время поскольку отрезок AA_1 параллелен отрезку DD_1, то по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{A_1O_1}{O_1D_1} = \frac{AO}{OD}$. Поэтому $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Итоги главы 2

Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые называют пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.

Две прямые в пространстве называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые в пространстве называют скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Свойства параллельных прямых

Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.

Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещивающиеся.

Параллельность в пространстве

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Два многоугольника параллельны, если они лежат в параллельных плоскостях.

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются по прямой, отличной от двух данных, то эта прямая параллельна каждой из двух данных прямых.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Признак параллельности двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных плоскостей

Через точку в пространстве, не принадлежащую данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.

Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Преобразование фигур в пространстве

Преобразование фигуры, сохраняющее расстояние между её точками, называют движением фигуры.

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой фигуры.

Параллельное проектирование

Параллельной проекцией прямой является прямая; параллельной проекцией отрезка является отрезок.

Параллельной проекцией двух параллельных прямых являются или прямая, или две параллельные прямые. Параллельные проекции двух параллельных отрезков лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Отношение параллельных проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению самих отрезков.

Глава 3. Перпендикулярность в пространстве

В этой главе вы ознакомитесь с понятиями угла между прямыми в пространстве, угла между прямой и плоскостью, угла между двумя плоскостями. Ознакомитесь с понятием ортогональной проекции, изучите свойства ортогональной проекции многоугольника.

§ 8. Угол между прямыми в пространстве

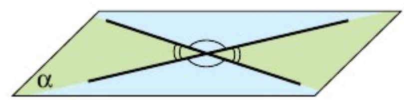
Поскольку две любые пересекающиеся прямые пространства лежат в одной плоскости, то угол между ними определим так же, как и в планиметрии.

При пересечении двух прямых образуются четыре угла (рис. 8.1). Здесь возможны два случая:

1) все четыре угла прямые;

2) из четырёх углов два являются равными острыми и два – равными тупыми углами.

Рис. 8.1



В обоих случаях из четырёх углов найдётся такой, величина которого не превосходит 90°.

Определение

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину того из углов, образовавшихся при их пересечении, который не превосходит 90°.

Если φ – угол между двумя пересекающимися прямыми, то $0^\circ < \varphi \le 90^\circ$.

Угол между двумя параллельными прямыми считают равным 0°. Поэтому если φ – угол между двумя прямыми, лежащими в одной плоскости, то $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

Введём понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Определение

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Пусть прямые a и b скрещивающиеся. Через точку M пространства проведём прямые a_1 и b_1 так, что $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 8.2). По определению угол между скрещивающимися прямыми a и b равен углу между пересекающимися прямыми a_1 и b_1.

Возникает естественный вопрос: зависит ли угол между данными скрещивающимися прямыми a и b от выбора точки M? Ответить на этот вопрос поможет следующая теорема.

Теорема 8.1

Угол между двумя пересекающимися прямыми равен углу между двумя другими пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Доказательство

Пусть прямые a и b пересекаются в точке M, а прямые a_1 и b_1 – в точке M_1, причём $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Докажем, что угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1.

Пусть через прямые a и b проходит плоскость α, а через прямые a_1 и b_1 – плоскость α_1.

Если плоскости α и α_1 совпадают, то все данные прямые лежат в одной плоскости (рис. 8.3), и утверждение теоремы можно доказать, используя свойства параллельных прямых на плоскости. Сделайте это самостоятельно.

Рис. 8.2

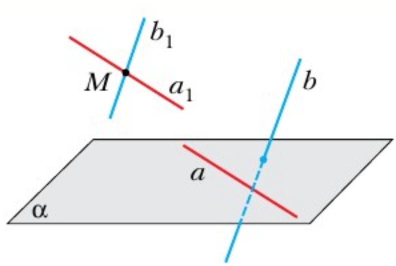
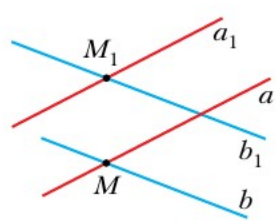


Рис. 8.3



Пусть плоскости α и α_1 различны (рис. 8.4). В плоскости параллельных прямых a и a_1 проведём прямую AA_1 параллельно прямой MM_1 ($A \in a$, $A_1 \in a_1$). В плоскости параллельных прямых b и b_1 проведём прямую BB_1 параллельно прямой MM_1 ($B \in b$, $B_1 \in b_1$).

Четырёхугольники AA_1M_1M и BB_1M_1M – параллелограммы, так как у них противоположные стороны параллельны.

Каждый из отрезков AA_1 и BB_1 равен и параллелен отрезку MM_1. Следовательно, четырёхугольник AA_1B_1B – параллелограмм.

Поскольку в параллелограмме противоположные стороны равны, то $AM = A_1M_1$, $BM = B_1M_1$, $AB = A_1B_1$. Следовательно, треугольники AMB и $A_1M_1B_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$.

Это означает, что угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1. ◄

Замечание. Воспользовавшись теоремой 8.1, можно показать (сделайте это самостоятельно), что *угол между скрещивающимися прямыми a и b равен углу между пересекающимися прямыми a и b_1, где $b_1 \parallel b$.*

Например на рисунке 8.5 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Угол между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC равен углу между пересекающимися прямыми BB_1 и BC.

Определение

Две прямые в пространстве называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Заметим, что перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Если прямые a и b перпендикулярны, то записывают: $a \perp b$.

Два отрезка в пространстве называют **перпендикулярными**, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Например, рёбра AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны (рис. 8.6). Действительно, поскольку $DD_1 \parallel CC_1$, то угол между прямыми AD и CC_1 равен углу между прямыми AD и DD_1. Но $\angle ADD_1 = 90°$, поэтому $AD \perp CC_1$.

Рис. 8.4

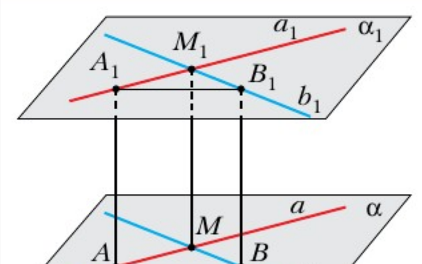


Рис. 8.5

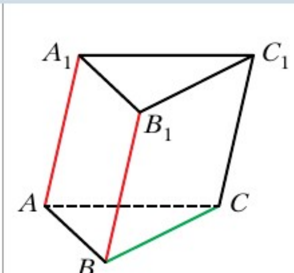
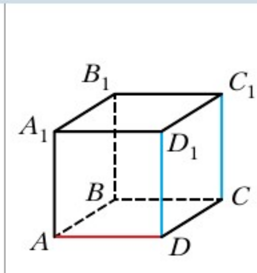


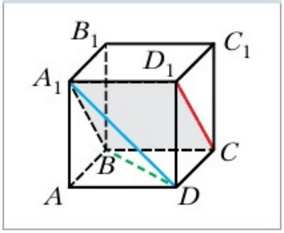
Рис. 8.6



Задача. На рисунке 8.7 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1D и D_1C.

Решение. Соединим точки A_1 и B. Поскольку $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C и B лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости AA_1B и DD_1C_1 по параллельным прямым A_1B и D_1C. Следовательно, угол между прямыми A_1D и D_1C равен углу DA_1B.

Рис. 8.7



Соединим точки B и D. Отрезки A_1D, A_1B и BD равны как диагонали равных квадратов. Следовательно, треугольник A_1BD равносторонний. Тогда $\angle DA_1B = 60°$. ◄

1. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?
2. Что называют углом между двумя скрещивающимися прямыми?
3. Какие две прямые в пространстве называют перпендикулярными?
4. Какие два отрезка в пространстве называют перпендикулярными?

Упражнения

8.1. Сколько в пространстве можно провести прямых, перпендикулярных данной прямой, через точку: 1) принадлежащую данной прямой; 2) не принадлежащую данной прямой?

8.2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.8). Найдите угол между прямыми: 1) CD и BC; 2) AA_1 и C_1D_1; 3) AA_1 и D_1C; 4) AC и B_1D_1; 5) A_1C_1 и AC.

8.3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 8.8). Найдите угол между прямыми: 1) AB и BB_1; 2) AB и B_1D_1; 3) A_1D и B_1C; 4) B_1D_1 и C_1C.

8.4. Точка M, не принадлежащая плоскости прямоугольника $ABCD$, такова, что треугольник CMD равносторонний (рис. 8.9). Найдите угол между прямыми AB и MC.

8.5. Точка M не принадлежит плоскости квадрата $ABCD$, $\angle MBA = 40°$, $\angle MBC = 90°$. Найдите угол между прямыми: 1) MB и AD; 2) MB и CD.

Рис. 8.8

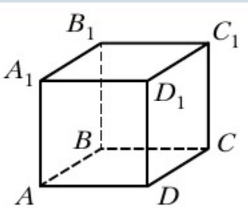
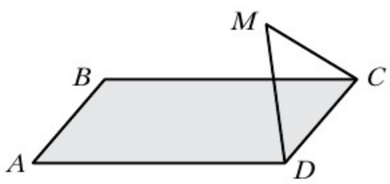


Рис. 8.9



8.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и треугольник MEF не лежат в одной плоскости, точка E – середина отрезка AB, точка F – середина отрезка CD, $ME = FE$, $\angle MEF = 110°$. Найдите угол между прямыми: 1) AD и EF; 2) AD и ME; 3) BC и MF.

8.7. Параллелограмм $ABCD$ и треугольник AED не лежат в одной плоскости (рис. 8.10). Найдите угол между прямыми BC и AE, если $\angle AED = 70°$, $\angle ADE = 30°$.

8.8. Известно, что $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 8.11). Найдите отрезок CD, если $BC = 17$ см, $AB = 15$ см, $BD = 3\sqrt{29}$ см.

8.9. Известно, что $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 8.11). Найдите отрезок BC, если $CD = 2\sqrt{43}$ см, $BD = 12$ см, $\angle ABD = 60°$.

Рис. 8.10

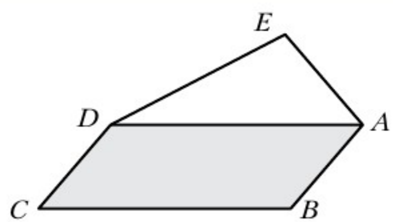
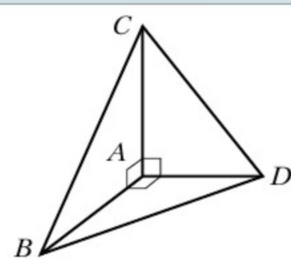


Рис. 8.11



8.10. Каждое ребро тетраэдра $DABC$ равно a, точки M и K – середины рёбер AB и CD соответственно (рис. 8.12).
1) Докажите, что $MK \perp AB$ и $MK \perp CD$.
2) Найдите отрезок MK.

8.11. Точки E, F, M и K – середины соответственно рёбер AB, BC, AD и BD тетраэдра $DABC$ (рис. 8.13). Найдите угол между прямыми EF и MK, если $\angle BAC = \alpha$.

Рис. 8.12

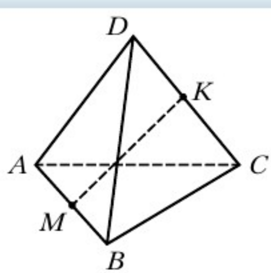
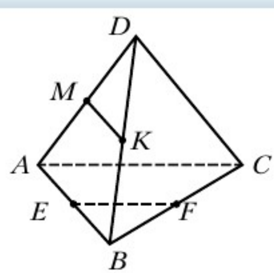


Рис. 8.13



8.12. Диагонали грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми OB_1 и A_1C_1.

8.13. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат, сторона которого равна a, боковое ребро параллелепипеда равно $a\sqrt{3}$. Найдите угол между прямыми AD_1 и B_1C.

8.14. Точки E и F – середины соответственно рёбер AA_1 и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую, которая проходит через точку D_1, перпендикулярна прямой EF и пересекает отрезок EF.

8.15. Точки E, F, M и K – середины соответственно рёбер AB, AD, CD и BC тетраэдра $DABC$. Известно, что $EM = FK$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

8.16. Точки E, F, M и K – середины соответственно рёбер AB, AD, CD и BC тетраэдра $DABC$, $AC = 12$ см, $BD = 16$ см, $FK = 2\sqrt{13}$ см. Найдите угол между прямыми AC и BD.

Упражнения для повторения

8.17. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 24 см и 10 см, $AD = 13$ см. Найдите периметр параллелограмма.

8.18. Точка D является образом вершины B треугольника ABC при симметрии относительно биссектрисы угла BAC. Найдите отрезок CD, если $AB = 4$ см, $AC = 7$ см.

§ 9. Перпендикулярность прямой и плоскости

В повседневной жизни мы говорим: флагшток перпендикулярен поверхности земли (рис. 9.1), мачты парусника перпендикулярны поверхности палубы (рис. 9.2), шуруп вкручивают в доску перпендикулярно её поверхности (рис. 9.3) и т. п.

Рис. 9.1

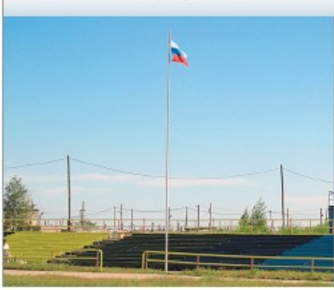
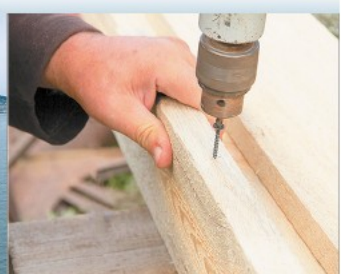


Рис. 9.2

Рис. 9.3



Эти примеры дают представление о прямой, перпендикулярной плоскости.

Определение

Прямую называют перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 9.4)**.**

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то записывают: $a \perp \alpha$. Также принято говорить, что плоскость α перпендикулярна прямой a или прямая a и плоскость α перпендикулярны.

Из определения следует, что если прямая a перпендикулярна плоскости α, то она пересекает эту плоскость. Действительно, если бы выполнялось одно из двух условий: $a \parallel \alpha$ или $a \subset \alpha$, то в плоскости α нашлась бы такая прямая b, что $a \parallel b$. А это противоречило бы определению.

Отрезок называют **перпендикулярным плоскости**, если он принадлежит прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Рис. 9.4

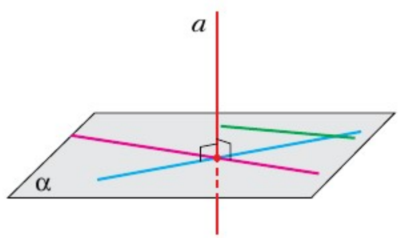
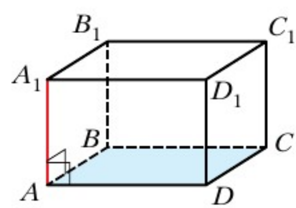


Рис. 9.5



Например, интуитивно понятно, что ребро AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 9.5). Доказать этот факт, пользуясь лишь определением прямой, перпендикулярной плоскости, затруднительно, ведь для этого нужно было бы доказать, что прямая AA_1 перпендикулярна любой прямой плоскости ABC. Гораздо эффективнее воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 9.1

(признак перпендикулярности прямой и плоскости)

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

Доказательство

Пусть прямая c перпендикулярна прямым a и b, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 9.6). Докажем, что $c \perp \alpha$.

Рассмотрим произвольную прямую x плоскости α, отличную от прямых a и b. Если мы докажем, что $c \perp x$, то тем самым докажем, что прямая c перпендикулярна любой прямой плоскости α, т. е. $c \perp \alpha$.

Если прямая x параллельна прямой a или прямой b, то из определения угла между двумя прямыми следует, что $c \perp x$.

Рассмотрим случай, когда прямая x не параллельна ни одной из прямых a и b.

Через точку O проведём прямые c_1 и x_1 так, что $c_1 \parallel c$ и $x_1 \parallel x$ (рис. 9.7). Если прямая c или прямая x проходит через точку O, то в качестве прямых c_1 или x_1 будут выступать соответственно сами прямые c или x.

Рис. 9.6

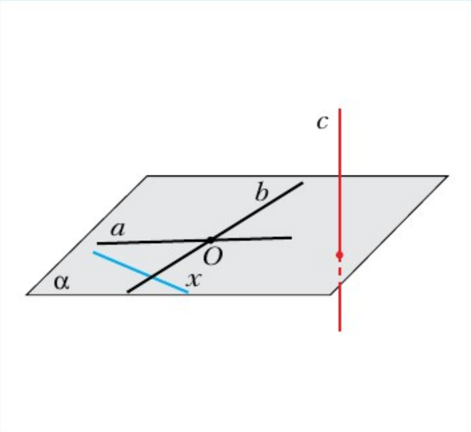
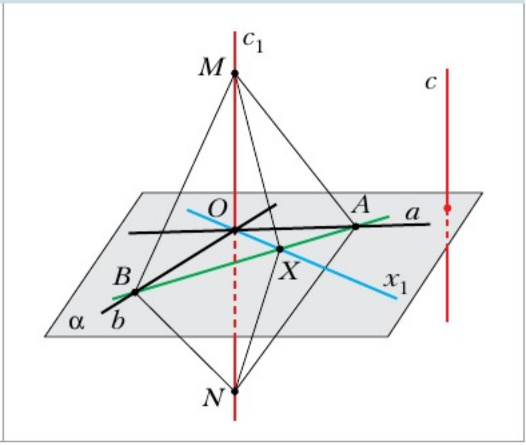


Рис. 9.7



Для доказательства перпендикулярности прямых c и x достаточно показать, что $c_1 \perp x_1$.

В плоскости α проведём прямую, не проходящую через точку O и пересекающую прямые b, x_1 и a в точках B, X и A соответственно. На прямой c_1 отметим точки M и N так, чтобы точка O была серединой отрезка MN.

Поскольку $c \perp b$ и $c \parallel c_1$, то $c_1 \perp b$. Тогда $\angle MOB = \angle NOB = 90°$. В треугольнике MBN отрезок BO является высотой и медианой, значит, этот треугольник равнобедренный, т. е. $BM = BN$. Аналогично можно доказать, что $AM = AN$.

В треугольниках BMA и BNA сторона AB общая, $BM = BN$, $AM = AN$. Следовательно, эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle MBX = \angle NBX$.

В треугольниках MBX и NBX сторона BX общая, $\angle MBX = \angle NBX$, $BM = BN$. Следовательно, эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $XM = XN$.

В равнобедренном треугольнике MXN отрезок XO является медианой, следовательно, он также является высотой, т. е. $MN \perp XO$. Отсюда $c_1 \perp x_1$. ◄

На рисунке 9.5 прямая AA_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AD плоскости ABC. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AA_1 \perp ABC$, а значит, и ребро AA_1 тоже перпендикулярно плоскости ABC.

Теорему 9.1 часто используют на практике. Например, подставка для новогодней ёлки имеет форму крестовины. Если ёлку установить так, чтобы её ствол был перпендикулярен направлениям крестовины, то ёлка будет стоять перпендикулярно плоскости пола (рис. 9.8).

Рис. 9.8

Следующую теорему можно рассматривать как ещё один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

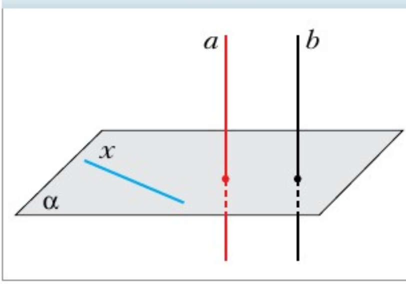
Теорема 9.2

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство

Пусть прямые a и b параллельны, причём $a \perp \alpha$ (рис. 9.9). Докажем, что $b \perp \alpha$.

Рис. 9.9



Рассмотрим произвольную прямую x плоскости α. Поскольку $a \perp \alpha$, то $a \perp x$, т. е. угол между прямыми a и x равен $90°$. Так как $b \parallel a$, то угол между прямыми b и x тоже равен $90°$. Следовательно, прямая b перпендикулярна произвольной прямой плоскости α, т. е. $b \perp \alpha$. ◄

Следующую теорему можно рассматривать как признак параллельности двух прямых.

Теорема 9.3

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$ (рис. 9.10). Докажем, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда через точку M прямой b, такую, что $M \notin \alpha$, проведём прямую b_1 параллельно прямой a. По теореме 9.2 получаем, что $b_1 \perp \alpha$. Две прямые b и b_1, проходящие через точку M, пересекают плоскость α в двух точках B и B_1 соответственно (см. рис. 9.10). Поскольку $b \perp \alpha$, $b_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \subset \alpha$, то $b \perp BB_1$ и $b_1 \perp BB_1$. Получили, что в плоскости MBB_1 через точку M проходят две прямые, перпендикулярные прямой BB_1. Мы пришли к противоречию, значит, $a \parallel b$. ◄

Замечание. При доказательстве теоремы 9.3 мы доказали следующий факт: через точку M, не принадлежащую плоскости α, проходит не более одной прямой, перпендикулярной плоскости α. На самом деле имеет место следующая теорема.

Теорема 9.4

Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.

Определение

Точки M и M_1 называют симметричными относительно плоскости α, если отрезок MM_1 перпендикулярен этой плоскости и делится этой плоскостью пополам (рис. 9.11). **Каждую точку плоскости α считают симметричной самой себе.**

Рис. 9.10

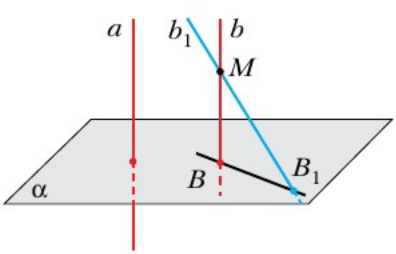
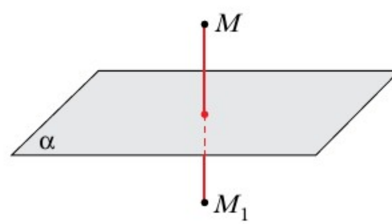


Рис. 9.11



Пусть даны фигура F и плоскость α. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, симметричную ей относительно плоскости α. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 9.12).

Такое преобразование фигуры F называют **симметрией относительно плоскости** α. Говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно плоскости** α. Симметрию относительно плоскости также называют **зеркальной симметрией**.

Можно показать, что симметрия относительно плоскости является движением. Это означает, что фигуры, симметричные относительно плоскости, равны.

Определение

Фигуру называют симметричной относительно плоскости α, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно плоскости α, также принадлежит этой фигуре.

Плоскость α называют **плоскостью симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет плоскость симметрии** (рис. 9.13).

Рис. 9.12

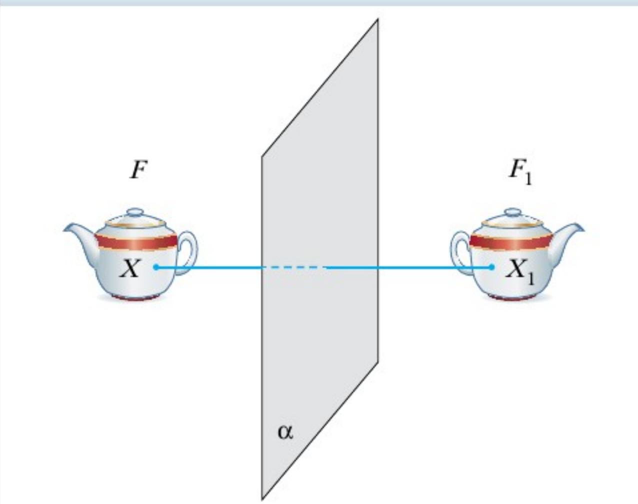
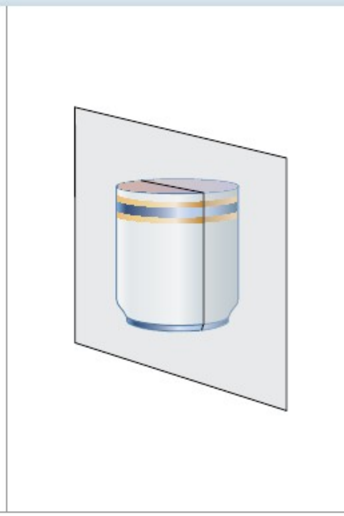


Рис. 9.13



Например, плоскость симметрии имеют прямоугольный параллелепипед, конус, шар (рис. 9.14).

С симметрией относительно плоскости мы часто встречаемся в природе (рис. 9.15), архитектуре и технике (рис. 9.16).

Рис. 9.14

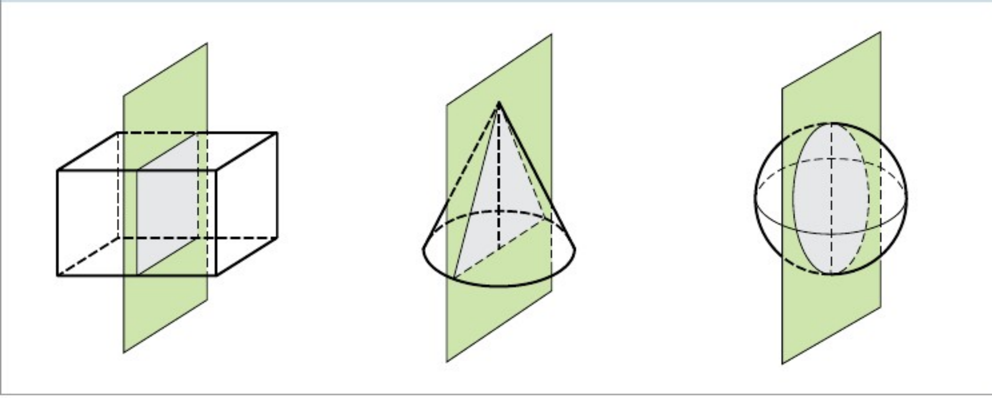
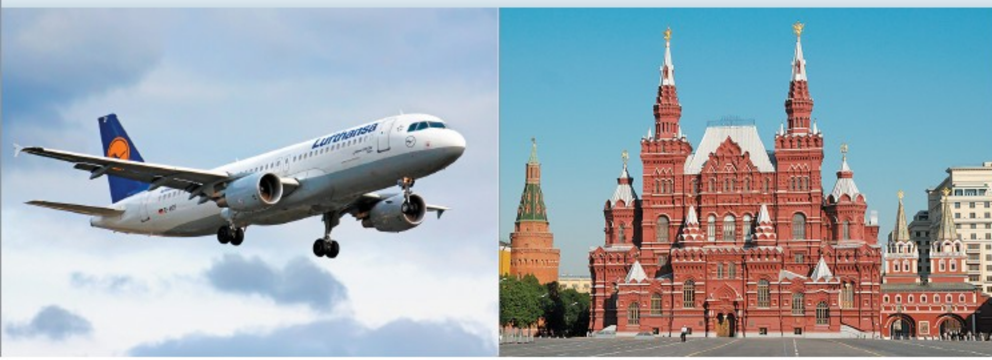


Рис. 9.15

Рис. 9.16



1. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
2. Какой отрезок называют перпендикулярным плоскости?
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Сформулируйте теорему о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.
5. Сформулируйте теоремы о двух прямых, перпендикулярных одной и той же плоскости.
6. Какие точки называют симметричными относительно плоскости?
7. Опишите преобразование фигуры, которое называют симметрией относительно плоскости.
8. Какую фигуру называют симметричной относительно плоскости?

Упражнения

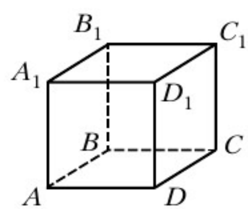
9.1. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Существуют ли в плоскости α прямые, не перпендикулярные прямой a?

9.2. Прямая m перпендикулярна прямым a и b плоскости α. Следует ли из этого, что прямая m перпендикулярна плоскости α?

9.3. Верно ли утверждение, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

9.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.17). Назовите грани куба, которым перпендикулярна прямая: 1) AA_1; 2) AD.

Рис. 9.17



9.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 9.17). Укажите прямые, которые перпендикулярны плоскости грани: 1) AA_1B_1B; 2) $A_1B_1C_1D_1$.

9.6. Верно ли утверждение, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна:

1) стороне и медиане треугольника, лежащего в этой плоскости;

2) стороне и средней линии треугольника, лежащего в этой плоскости;

3) двум сторонам трапеции, лежащей в этой плоскости;

4) двум диаметрам окружности, лежащей в этой плоскости;

5) двум диагоналям правильного шестиугольника, лежащего в этой плоскости?

9.7. Три прямые a, b и c лежат в плоскости α. Прямая m перпендикулярна прямым a и b, но не перпендикулярна прямой c. Каково взаимное расположение прямых a и b?

9.8. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая DO, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 9.18). Найдите отрезок DO, если $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.

9.9. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая MO, перпендикулярная плоскости квадрата (рис. 9.19). Найдите расстояние от точки M до вершины D, если $AD = 4\sqrt{2}$ см, $MO = 2$ см.

9.10. Точка O – центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a (рис. 9.20). Найдите:

1) расстояние от точки O до вершины B_1 куба;

2) тангенс угла между прямыми B_1O и DD_1.

Рис. 9.18

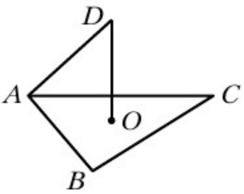


Рис. 9.19

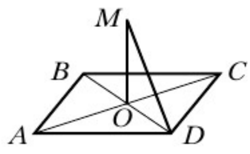
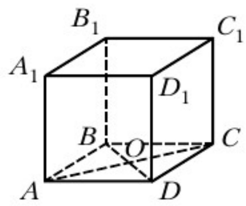


Рис. 9.20



9.11. Диагональ B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 17 см, а диагональ AB_1 боковой грани AA_1B_1B равна 15 см (рис. 9.21). Найдите ребро AD параллелепипеда.

9.12. Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BE, перпендикулярная плоскости ромба (рис. 9.22). Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BEO.

9.13. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена прямая AF, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 9.23). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости AFC.

Рис. 9.21

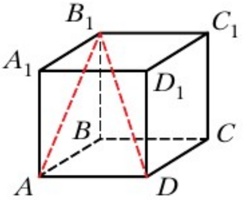


Рис. 9.22

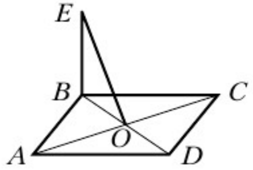
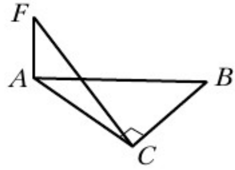


Рис. 9.23



9.14. На ребре AB прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку M. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AB.

9.15. Точка K – середина ребра DA тетраэдра $DABC$, все рёбра которого равны. Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости BKC.

9.16. Через вершины A и D параллелограмма $ABCD$ проведены прямые AM и DK, перпендикулярные плоскости параллелограмма (рис. 9.24). Докажите, что плоскости MAB и KDC параллельны.

9.17. Через вершины A и B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведены прямые AE и BF, перпендикулярные плоскости трапеции (рис. 9.25). Каково взаимное расположение плоскостей EAD и FBC?

9.18. Образом прямой при симметрии относительно данной плоскости является сама эта прямая. Определите взаимное расположение этой прямой и данной плоскости.

9.19. Сколько плоскостей симметрии имеет: 1) отрезок; 2) прямая; 3) плоскость; 4) окружность; 5) угол; 6) квадрат? Опишите, как они расположены.

9.20. Плоскость α, перпендикулярная катету AC прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке E, а гипотенузу AB – в точке F. Найдите отрезок EF, если $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ см.

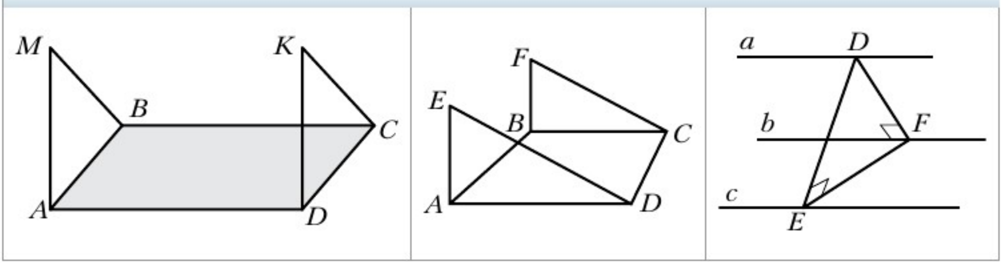
9.21. В тетраэдре $DABC$ известно, что $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$. Докажите, что $AD \perp BC$.

9.22. В тетраэдре $DABC$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $BD \perp AC$.

9.23. Отрезок BD является общей медианой равнобедренных треугольников ABC и EFB, лежащих в разных плоскостях ($BA = BC$ и $BE = BF$). Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости AEC.

9.24. Параллельные прямые a, b и c не лежат в одной плоскости (рис. 9.26). На прямой a отметили точку D и провели через неё две прямые, одна из которых перпендикулярна прямой b и пересекает её в точке F,

Рис. 9.24 **Рис. 9.25** **Рис. 9.26**



а другая перпендикулярна прямой c и пересекает её в точке E. Докажите, что $EF \perp b$ и $EF \perp c$.

9.25. Данная точка, расположенная вне плоскости правильного треугольника, равноудалена от его вершин. Докажите, что прямая, проходящая через данную точку и центр данного треугольника, перпендикулярна плоскости треугольника.

9.26. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите отрезок CD, если $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

9.27. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок AB, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB_1 = 10$ см.

9.28. Через концы A и B и точку C отрезка AB, не пересекающего плоскость α, проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 25$ см, $AC : BC = 1 : 4$.

9.29. Через концы M и N и точку K отрезка MN, не пересекающего плоскость α, проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках M_1, N_1 и K_1 соответственно. Найдите отрезок NN_1, если $MM_1 = 14$ см, $KK_1 = 10$ см, $MK : KN = 3 : 5$.

9.30. Параллелограмм $ABCD$ не имеет общих точек с плоскостью α. Через вершины A, B, C и D проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 11$ см, $BB_1 = 18$ см, $DD_1 = 16$ см.

9.31. При симметрии относительно плоскости образом прямой a является прямая a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости.

9.32. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

9.33. Докажите, что прямые, проходящие через данную точку прямой и перпендикулярные этой прямой, лежат в одной плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной этой прямой.

9.34. Каждое ребро тетраэдра $DABC$ равно a. На ребре AD отмечена точка M, такая, что $AM : MD = 3 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной ребру AD, и найдите площадь этого сечения.

9.35. Через вершину B прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена прямая BD, перпендикулярная плоскости ABC. На отрезках DC и DA отмечены точки E и F, такие, что $EF \parallel AC$. Докажите, что $BE \perp EF$.

9.36. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная плоскости квадрата. Докажите, что линия пересечения плоскостей ABM и CDM перпендикулярна плоскости BCM.

9.37. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости ABC. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке E, а медианы треугольника DBC – в точке F. Докажите, что прямая EF перпендикулярна плоскости ABC.

9.38. Точка E – середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и A_1E.

9.39. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна $4\sqrt{2}$ см. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2 см. Точки M и K – середины рёбер BC и AB соответственно. Найдите угол между прямыми SM и CK.

Упражнения для повторения

9.40. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой, если одна из наклонных на 2 см больше другой.

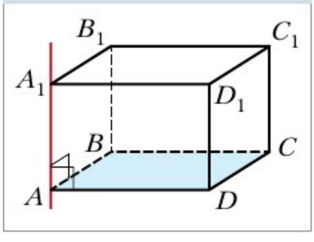
9.41. Биссектриса тупого угла ABC равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) пересекает основание AD в точке E. Известно, что $BE \perp AC$, а четырёхугольник $BCDE$ – параллелограмм. Найдите: 1) основание BC трапеции, если её периметр равен 40 см; 2) углы трапеции.

§ 10. Перпендикуляр и наклонная

Пусть фигура F_1 – параллельная проекция фигуры F на плоскость α в направлении прямой l. Если $l \perp \alpha$, то фигуру F_1 называют **ортогональной проекцией** фигуры F на плоскость α.

Например, основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ортогональной проекцией основания $A_1B_1C_1D_1$ на плоскость ABC в направлении прямой AA_1 (рис. 10.1).

Рис. 10.1



В дальнейшем, говоря о проекции фигуры, если не оговорено противное, будем иметь в виду ортогональную проекцию.

Пусть даны плоскость α и не принадлежащая ей точка A. Через точку A проведём прямую a, перпендикулярную плоскости α. Пусть $a \cap \alpha = B$ (рис. 10.2). Отрезок AB называют **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость α, точку B – **основанием перпендикуляра**. Основание B перпендикуляра AB – это проекция точки A на плоскость α.

Отметим на плоскости α какую-нибудь точку C, отличную от точки B. Проведём отрезок AC (см. рис. 10.2). Отрезок AC называют **наклонной**, проведённой из точки A к плоскости α, точку C – **основанием наклонной**. Отрезок BC является **проекцией наклонной** AC.

Теорема 10.1

Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то длина наклонной больше длины перпендикуляра.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что если точка, не принадлежащая плоскости многоугольника, равноудалена от его вершин, то проекцией этой точки на плоскость многоугольника является центр его описанной окружности.

Решение. Проведём доказательство для треугольника. Для других многоугольников доказательство будет аналогичным.

Пусть точка M не принадлежит плоскости ABC, причём $MA = MB = MC$. Опустим из точки M перпендикуляр MO на плоскость ABC (рис. 10.3). Докажем, что точка O – центр описанной окружности треугольника ABC.

Рис. 10.2

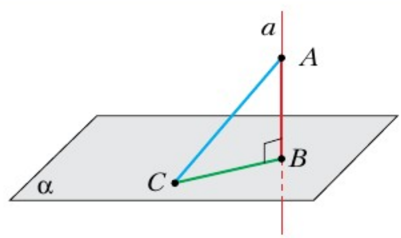
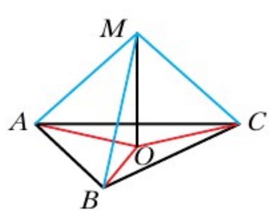


Рис. 10.3



Поскольку $MO \perp ABC$, то $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$. В прямоугольных треугольниках MOA, MOB, MOC катет MO общий, гипотенузы равны, следовательно, эти треугольники равны по гипотенузе и катету. Из равенства этих треугольников следует, что $OA = OB = OC$, т. е. точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. ◄

Заметим, что когда хотят определить расстояние между двумя геометрическими фигурами, то стремятся найти расстояние между их ближайшими точками. Например, из курса планиметрии вы знаете, что расстоянием от точки, не принадлежащей прямой, до этой прямой называют расстояние от данной точки до ближайшей точки на прямой, т. е. длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

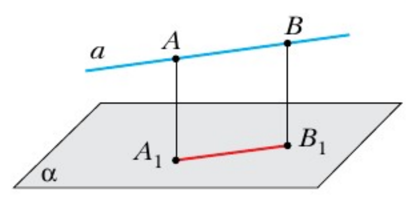
Теорема 10.1 показывает, что целесообразно принять следующее определение.

Определение

Если точка не принадлежит плоскости, то расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то считают, что расстояние от точки до плоскости равно нулю.

Задача 2. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости.

Рис. 10.4



Решение. Пусть A и B – две произвольные точки прямой a, параллельной плоскости α. Точки A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A и B на плоскость α (рис. 10.4). Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

По теореме 9.3 $AA_1 \parallel BB_1$. Следовательно, точки A, A_1, B_1, B лежат в одной плоскости. Плоскость ABB_1 проходит через прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает плоскость α по прямой A_1B_1. Тогда по теореме 5.2 получаем, что $AB \parallel A_1B_1$. Таким образом, у четырёхугольника AA_1B_1B каждые две противолежащие стороны параллельны. Следовательно, четырёхугольник AA_1B_1B – параллелограмм. Отсюда $AA_1 = BB_1$.

Поскольку точки A и B выбраны на прямой a произвольно, то утверждение задачи доказано. ◄

Доказанное свойство позволяет принять следующее определение.

Определение

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Задача 3. Докажите, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

Решите эту задачу самостоятельно.

Определение

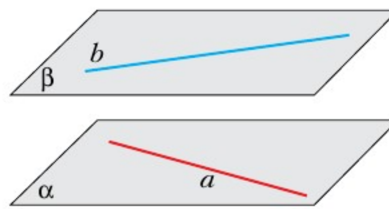
Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называют расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Свойства, доказанные в ключевых задачах 2 и 3, часто используют в практической деятельности, например в строительстве (рис. 10.5).

Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Проведём через данные скрещивающиеся прямые a и b параллельные плоскости α и β (рис. 10.6). Возможность такого построения следует из ключевой задачи 6.25. **Расстоянием между скрещивающимися прямыми** a и b называют расстояние между плоскостями α и β.

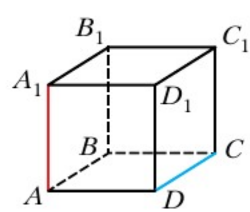
Рис. 10.5

Рис. 10.6



Ясно, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b также равно расстоянию между прямой b и плоскостью α или прямой a и плоскостью β (см. рис. 10.6). Например, в кубе (рис. 10.7) расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и CD равно длине ребра куба. Действительно, эти прямые лежат в параллельных плоскостях AA_1B_1 и DD_1C_1, расстояние между которыми равно длине ребра куба.

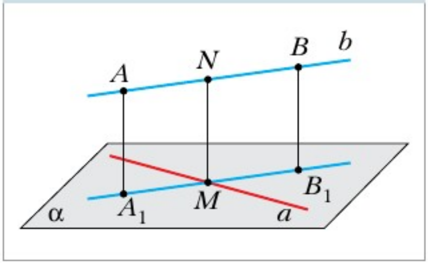
Рис. 10.7



Задача 4. Докажите, что для любых двух скрещивающихся прямых существует отрезок, перпендикулярный этим прямым, концы которого лежат на этих прямых.

Решение. Пусть прямые a и b – скрещивающиеся и прямая b параллельна плоскости α, проходящей через прямую a (см. рис. 10.6).

Рис. 10.8



Из точек A и B прямой b опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость α. Пусть прямая A_1B_1 пересекает прямую a в точке M (рис. 10.8). В плоскости ABB_1 из точки M опустим перпендикуляр MN на прямую b.

Поскольку четырёхугольник AA_1B_1B – прямоугольник, то $MN \parallel B_1B$. В силу теоремы 9.2 получаем, что $MN \perp \alpha$, а значит, $MN \perp a$. ◄

Заметим, что построенный отрезок MN равен отрезку B_1B. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно длине отрезка MN.

Определение

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок, который перпендикулярен этим прямым и концы которого лежат на этих прямых.

На рисунке 10.8 отрезок MN – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b.

Выше мы показали, что *длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми.*

1. В каком случае говорят, что фигура F_1 является ортогональной проекцией фигуры F?
2. Опишите, какой отрезок называют: 1) перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость; 2) наклонной, проведённой из точки к плоскости.
3. Сформулируйте теорему о перпендикуляре и наклонной, проведённых к плоскости из одной точки.
4. Что называют расстоянием от точки до плоскости?
5. Что называют расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости?
6. Что называют расстоянием между двумя параллельными плоскостями?
7. Что называют расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми?
8. Что называют общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых?

Упражнения

10.1. На рисунке 10.9 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите проекцию отрезка C_1D на плоскость:

1) ABC; 2) BB_1C; 3) AA_1B_1.

10.2. На рисунке 10.10 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите проекцию отрезка DB_1 на плоскость:

1) $A_1B_1C_1$; 2) CDD_1; 3) AA_1D_1.

Рис. 10.9

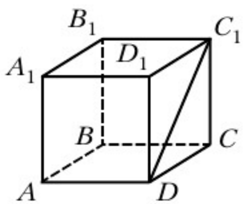
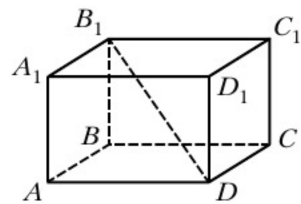


Рис. 10.10



10.3. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 12 см и наклонная длиной 13 см. Найдите проекцию этой наклонной на данную плоскость.

10.4. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр и наклонная длиной $\sqrt{7}$ см. Проекция данной наклонной на плоскость равна $\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

10.5. Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AC и наклонные AB и AD (рис. 10.11). Найдите проекцию наклонной AD на плоскость α, если $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 8$ см, $AD = 9$ см.

10.6. Из точки M проведены к плоскости α перпендикуляр MH и наклонные MA и MB (рис. 10.12). Найдите наклонную MA, если $BH = 6\sqrt{6}$ см, $MB = 18$ см, $\angle MAH = 60^\circ$.

Рис. 10.11

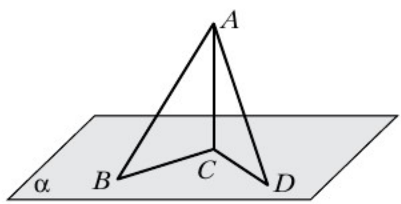
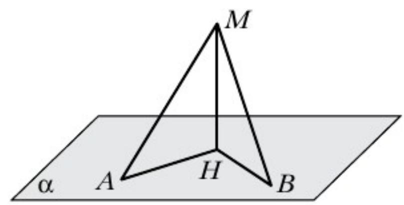


Рис. 10.12



10.7. Докажите, что равные наклонные, проведённые к плоскости из одной точки, имеют равные проекции.

10.8. Докажите, что если проекции двух наклонных, проведённых к плоскости из одной точки, равны, то равны и наклонные.

10.9. Докажите, что если точка принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости многоугольника и проходящей через центр окружности, описанной около многоугольника, то эта точка равноудалена от вершин многоугольника.

10.10. Расстояние между параллельными плоскостями α и β равно 4 см. Прямые m и n скрещивающиеся, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$. Чему равно расстояние между прямыми m и n?

10.11. Расстояние между скрещивающимися прямыми, принадлежащими соответственно параллельным плоскостям α и β, равно 10 см. Чему равно расстояние между плоскостями α и β?

10.12. Расстояние между параллельными прямыми, принадлежащими соответственно параллельным плоскостям α и β, равно 7 см. Верно ли утверждение, что расстояние между плоскостями α и β равно 7 см?

10.13. На рисунке 10.13 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 2 см. Найдите расстояние между прямыми AB и DD_1.

10.14. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 10.14). Найдите расстояние между прямыми AD и BC, если $AB = 10$ см, $\angle BAC = 45°$.

Рис. 10.13

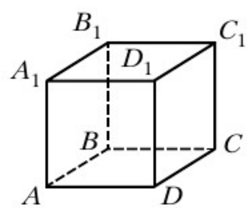
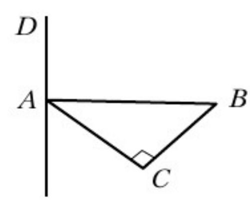


Рис. 10.14



10.15. Из точки M провели к плоскости α равные наклонные MA, MB, MC и MD. Могут ли точки A, B, C и D быть вершинами:

1) прямоугольника;
2) ромба;
3) прямоугольной трапеции;
4) равнобокой трапеции?

10.16. Докажите, что из двух наклонных, проведённых к плоскости из одной точки, бóльшую проекцию имеет бóльшая наклонная.

10.17. Докажите, что из двух наклонных, проведённых к плоскости из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

10.18. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC длиной 25 см и 17 см соответственно. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции данных наклонных на эту плоскость относятся как 5 : 2.

10.19. Из точки D к плоскости α проведены наклонные DA и DB, сумма которых равна 28 см. Найдите эти наклонные, если их проекции на плоскость α равны соответственно 9 см и 5 см.

10.20. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MN и MK, образующие со своими проекциями на данную плоскость углы по 60°. Найдите расстояние между основаниями данных наклонных, если угол между наклонными равен 90°, а расстояние от точки M до плоскости α равно $\sqrt{3}$ см.

10.21. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие со своими проекциями на данную плоскость углы по 30°. Найдите данные наклонные и расстояние от точки A до плоскости α, если угол между проекциями наклонных равен 90°, а расстояние между основаниями наклонных равно 6 см.

10.22. Точка M находится на расстоянии 6 см от каждой вершины правильного треугольника ABC, сторона которого равна 9 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

10.23. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) равны 6 см и 8 см. Точка D удалена от каждой вершины данного треугольника на 13 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

10.24. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC и удалена от плоскости ABC на расстояние d. Найдите расстояние от точки M до вершин данного треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

10.25. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 4\sqrt{5}$ см, $AC = 8$ см. Точка D расположена на расстоянии $5\sqrt{5}$ см от каждой вершины треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

10.26. Вершина A треугольника ABC лежит в плоскости α, а сторона BC параллельна плоскости α. Из точек B и C опущены на плоскость α перпендикуляры BB_1 и CC_1. Проекция отрезка AB на плоскость α равна $\sqrt{14}$ см, а проекция отрезка AC — $3\sqrt{5}$ см. Найдите сторону BC, если $BB_1 = 2$ см, $\angle BAC = 45°$.

10.27. Через вершину B прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена плоскость β, параллельная прямой AC. Найдите проекцию гипотенузы AB на плоскость β, если $BC = 20$ см, $AC = 15$ см, а проекция катета BC на эту плоскость равна 12 см.

10.28. Сторона AD ромба $ABCD$ лежит в плоскости α. Прямая BC удалена от плоскости α на 3 см. Найдите проекции на плоскость α отрезков CD, AC и BD, если $AC = 8$ см, $BD = 6$ см.

10.29. Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ принадлежат плоскости α, а вершины C и D не принадлежат этой плоскости. Найдите расстояние от прямой CD до плоскости α, если $AB = 5$ см, $BC = 12$ см, а проекция диагонали прямоугольника на плоскость α равна $2\sqrt{22}$ см.

10.30. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и AA_1.

10.31. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Точки O и O_1 – центры соответственно граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба. Найдите расстояние между прямыми CD и OO_1.

10.32. Прямая m проходит через вершину A треугольника ABC и перпендикулярна его плоскости. Расстояние между прямыми m и BC равно 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 10$ см.

10.33. Прямая a проходит через вершину B параллелограмма $ABCD$ и перпендикулярна его плоскости. Найдите расстояние между прямыми a и CD, если $AB = 6$ см, а площадь параллелограмма $ABCD$ равна 72 см^2.

10.34. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MH и наклонные MA и MB так, что $\angle MAH = 30^\circ$, $\angle MBH = 45^\circ$, а угол между проекциями наклонных равен 90°. Найдите косинус угла между данными наклонными.

10.35. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AO и наклонные AB и AC так, что $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$, а косинус угла между наклонными равен $\frac{1}{4}$. Найдите угол между проекциями данных наклонных.

10.36. Основания трапеции равны 15 см и 20 см. Через большее основание трапеции проведена плоскость α на расстоянии 14 см от её меньшего основания. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α.

10.37. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 см. Найдите расстояние между прямыми B_1D и AC.

10.38. Длина каждого ребра тетраэдра $DABC$ равна 1 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

10.39. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M такова, что $OM = 1$ см. Через точку M проведена плоскость α, не имеющая с параллелограммом общих точек. Докажите, что сумма расстояний от вершин параллелограмма до плоскости α не больше 4 см.

Упражнения для повторения

10.40. Сторона правильного треугольника, описанного около окружности, равна 12 см. Найдите сторону квадрата, описанного около данной окружности.

10.41. Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной окружности в отношении 12 : 25, считая от вершины угла при основании треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника равна 1680 см^2.

§ 11. Теорема о трёх перпендикулярах

Теорема 11.1
(о трёх перпендикулярах)

Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

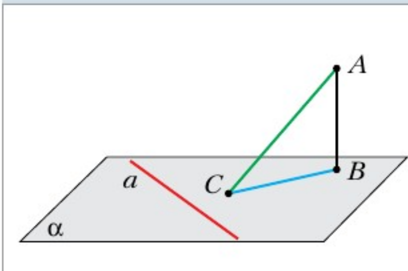
Доказательство

Докажем первую часть теоремы.

Пусть прямая a, принадлежащая плоскости α, перпендикулярна проекции BC наклонной AC (рис. 11.1). Докажем, что $a \perp AC$.

Имеем: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, значит, $AB \perp a$. Получили, что прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и BC плоскости ABC, следовательно, $a \perp ABC$. Поскольку $AC \subset ABC$, то $a \perp AC$.

Рис. 11.1



Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству первой части. Проведите его самостоятельно. ◄

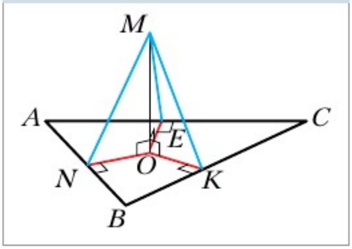
Теорема о трёх перпендикулярах содержит две теоремы: прямую и обратную. Формулировки взаимно обратных теорем можно объединить в одну с помощью словосочетания «тогда и только тогда». Например, теорему о трёх перпендикулярах можно сформулировать так:

прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

Задача. Точка M не принадлежит плоскости выпуклого многоугольника и равноудалена от всех прямых, содержащих его стороны. Проекцией точки M на плоскость многоугольника является точка O, принадлежащая многоугольнику. Докажите, что точка O – центр вписанной окружности многоугольника.

Решение. Проведём доказательство для треугольника. Для других многоугольников доказательство будет аналогичным.

Рис. 11.2



Опустим из точки O перпендикуляры ON, OK и OE соответственно на прямые AB, BC и CA. Соединим точку M с точками E, K и N (рис. 11.2).

Отрезок ON является проекцией наклонной MN на плоскость ABC. По построению $ON \perp AB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $MN \perp AB$.

Аналогично можно доказать, что $MK \perp BC$ и $ME \perp CA$. Следовательно, длины отрезков MN, MK и ME – расстояния от точки M до прямых AB, BC и CA соответственно. По условию $MN = MK = ME$.

В прямоугольных треугольниках MON, MOK, MOE катет MO общий, гипотенузы равны, следовательно, эти треугольники равны по катету и гипотенузе. Из равенства этих треугольников следует, что $ON = OK = OE$.

Длины отрезков ON, OK и OE являются расстояниями от точки O до прямых, содержащих стороны треугольника ABC. Мы показали, что эти расстояния равны. Поскольку точка O принадлежит треугольнику ABC, то O – центр вписанной окружности треугольника ABC. ◄

Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

Упражнения

11.1. На рисунке 11.3 изображён квадрат $ABCD$, прямая NC перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые BD и NO перпендикулярны.

11.2. На рисунке 11.4 изображён ромб $ABCD$. Прямая FC перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые AF и BD перпендикулярны.

11.3. На рисунке 11.5 изображён равносторонний треугольник ABC, точка D – середина стороны BC. Прямая AM перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что $MD \perp BC$.

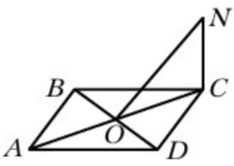


Рис. 11.3

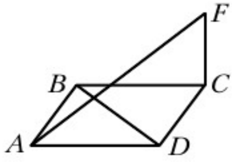


Рис. 11.4

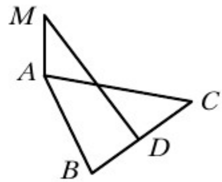


Рис. 11.5

11.4. Прямая AO перпендикулярна плоскости окружности с центром O (рис. 11.6). Прямая a принадлежит плоскости окружности и касается данной окружности в точке B. Докажите, что $AB \perp a$.

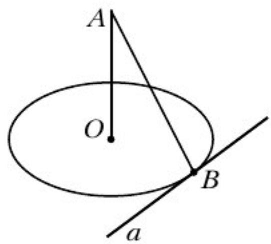


Рис. 11.6

11.5. Отрезок BD – перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием AC (рис. 11.7). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AC.

11.6. Отрезок BD – перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C (рис. 11.8). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AC.

11.7. Отрезок BE – перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$ (рис. 11.9). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки E на прямую AC.

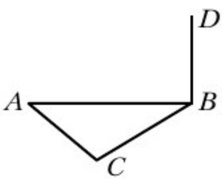


Рис. 11.7

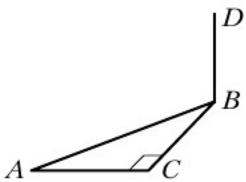


Рис. 11.8

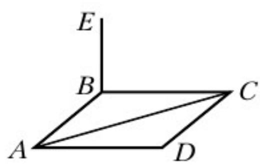


Рис. 11.9

11.8. Прямая MA перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$, $MD \perp CD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – прямоугольник.

11.9. Прямая MB перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$, $MD \perp AC$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – ромб.

11.10. Отрезок DA – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если расстояние от точки D до плоскости ABC равно 15 см.

11.11. Отрезок AB – диаметр окружности с центром O, отрезок BC – её хорда, $AB = 12$ см, $\angle ABC = 30°$. Отрезок AE – перпендикуляр к плоскости данной окружности. Найдите расстояние от точки E до плоскости окружности, если расстояние от точки E до прямой BC равно 10 см.

11.12. Отрезок MA – перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD, если $\angle BAC = 30°$, $AD = 10$ см, $MA = 5\sqrt{3}$ см.

11.13. Отрезок DA – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $\angle ABC = 120°$, $AB = 14$ см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если эта точка удалена от прямой BC на $2\sqrt{43}$ см.

11.14. Точка M равноудалена от всех прямых, содержащих стороны правильного треугольника ABC. Проекцией точки M на плоскость ABC является точка O, принадлежащая треугольнику. Найдите расстояние от точки M до стороны AB, если расстояние от этой точки до плоскости ABC равно $3\sqrt{2}$ см, $AB = 18$ см.

11.15. Сторона ромба равна 10 см, а одна из диагоналей – 16 см. Точка M находится на расстоянии 5,2 см от каждой прямой, содержащей сторону ромба. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба.

11.16. Точка M не принадлежит плоскости треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) и находится на расстоянии $2\sqrt{5}$ см от каждой из прямых, содержащих его стороны. Проекцией точки M на плоскость ABC является точка O, принадлежащая данному треугольнику. Точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, с гипотенузой AB делит её на отрезки длиной 3 см и 10 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

11.17. Точка M не принадлежит плоскости многоугольника, а её проекцией на плоскость многоугольника является центр окружности, вписанной в многоугольник. Докажите, что точка M равноудалена от сторон данного многоугольника.

11.18. Основания равнобокой трапеции равны 16 см и 36 см. Через центр O окружности, вписанной в эту трапецию, к её плоскости проведён перпендикуляр MO. Точка M находится на расстоянии 16 см от плоскости трапеции. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

11.19. Точка O – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ см, $\angle ADC = 45°$. Отрезок MO – перпендикуляр к плоскости трапеции. Точка M удалена от плоскости трапеции на $6\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

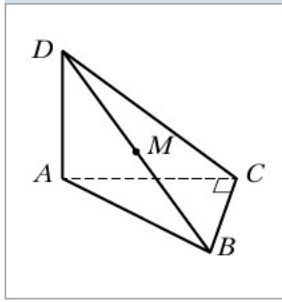
11.20. Параллельные прямые a, b и c не лежат в одной плоскости. Расстояние между прямыми a и b равно 25 см, а между прямыми b и c – 17 см. Расстояние между прямой b и плоскостью, в которой лежат прямые a и c, равно 15 см. Найдите расстояние между прямыми a и c.

11.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1C и B_1D_1.

11.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $CD_1 \perp AB_1C_1$.

11.23. Ребро DA тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 11.10), $AC = AD$, $\angle ACB = 90°$, точка M – середина ребра BD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой CD.

Рис. 11.10



11.24. Каждое ребро тетраэдра $DABC$ равно a. Из точки D опущен перпендикуляр DO на плоскость ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую DO и перпендикулярной прямой AB, и найдите площадь построенного сечения.

11.25. Диагональ AC ромба $ABCD$ лежит в плоскости α, а точка B удалена от плоскости α на $3\sqrt{7}$ см. Найдите проекцию диагонали BD на плоскость α, если $BD = 24$ см.

11.26. Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α, а точка B удалена от плоскости α на 5 см. Проекции отрезков AB и BC на плоскость α равны соответственно 12 см и 15 см, $AC = 9$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

11.27. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости DC_1B.

11.28. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна $4\sqrt{2}$ см. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2 см. Точки M и N – середины рёбер BC и AB соответственно. Найдите расстояние между прямыми SM и CN.

11.29. Из точки, лежащей вне прямой m, проведены к этой прямой наклонные DK и DB, образующие с ней углы 45° и 60° соответственно. Найдите проекцию наклонной DK на прямую m, если $DB = 10\sqrt{3}$ см.

11.30. Диагонали равнобокой трапеции делят её острые углы пополам, а точкой пересечения делятся в отношении 5 : 13. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 9 см.

§ 12. Угол между прямой и плоскостью

Вы знаете, что в давние времена путешественники ориентировались по звёздам. Они использовали угол, который образовывал с плоскостью горизонта луч, идущий от данной точки к небесному телу.

Сегодня человеку в своей деятельности также важно определять углы, под которыми наклонены к данной плоскости некоторые объекты (рис. 12.1).

Рис. 12.1

Эти примеры показывают, что целесообразно ввести понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение

Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным 0°.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным 90°.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то углом между такой прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на плоскость (рис. 12.2).

Из определения следует, что если φ – угол между прямой и плоскостью, то $0° \leq \varphi \leq 90°$.

Также принято говорить, что прямая образует угол φ с плоскостью.

Углом между отрезком и плоскостью называют угол между прямой, содержащей этот отрезок, и плоскостью.

Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.3). Угол между диагональю AB_1 грани AA_1B_1B и плоскостью ABC равен 45°. Действительно, прямая AB – проекция прямой AB_1 на плоскость ABC. Тогда угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC равен величине угла B_1AB. Поскольку четырёхугольник AA_1B_1B – квадрат, то $\angle B_1AB = 45°$.

Рис. 12.2

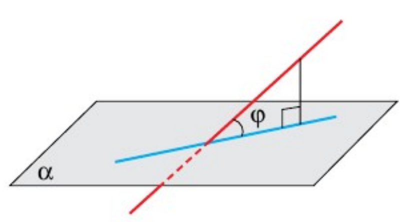
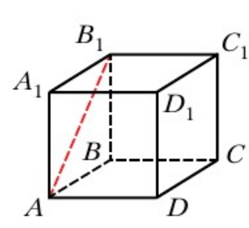


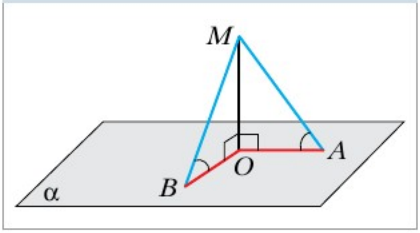
Рис. 12.3



Задача. Докажите, что если из одной точки к плоскости провести наклонные, образующие равные углы с плоскостью, то проекция данной точки на плоскость равноудалена от оснований наклонных.

Решение. Пусть MA и MB – наклонные, образующие с плоскостью α равные углы, отрезки OA и OB – проекции этих наклонных (рис. 12.4). Докажем, что $OA = OB$.

Рис. 12.4



Прямая OA является проекцией прямой MA на плоскость α. Поскольку угол MAO острый, то он равен углу между прямыми OA и MA. Следовательно, величина угла MAO равна углу между наклонной MA и плоскостью α. Аналогично доказывается, что величина угла MBO равна углу между наклонной MB и плоскостью α. По условию $\angle MAO = \angle MBO$.

Поскольку $MO \perp \alpha$, то $\angle MOA = \angle MOB = 90^\circ$. Получаем, что прямоугольные треугольники MOA и MOB равны по катету и противолежащему острому углу. Отсюда $OA = OB$. ◄

Что называют углом между прямой и плоскостью?

Упражнения

12.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O – центр грани $ABCD$ (рис. 12.5). Укажите угол между:
1) прямой AB_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$;
2) прямой AC_1 и плоскостью ABC;
3) прямой AC_1 и плоскостью CDD_1;
4) прямой OA_1 и плоскостью ABC;
5) прямой AC и плоскостью ADD_1.

12.2. Из точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, образующая с данной плоскостью угол 50°. Чему равен угол между данной наклонной и перпендикуляром?

12.3. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MA и наклонная MB, образующая с плоскостью α угол φ. Найдите: 1) проекцию наклонной MB на плоскость α, если расстояние от точки M до этой плоскости равно d; 2) наклонную MB, если её проекция на плоскость α равна a.

12.4. Из точки A к плоскости α проведена наклонная. Чему равен угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α: 1) равно проекции наклонной на плоскость α; 2) в два раза меньше самой наклонной?

12.5. Сколько наклонных, образующих с плоскостью α угол 40°, можно провести из точки A, не принадлежащей этой плоскости?

12.6. Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC (рис. 12.6), $AB = AM = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см. Найдите угол, который образует с плоскостью ABC прямая: 1) MB; 2) MC.

12.7. Точка O – центр правильного треугольника ABC (рис. 12.7), сторона которого равна 6 см. Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите угол между прямой MO и плоскостью ABC, если $MA = 2$ см.

Рис. 12.5

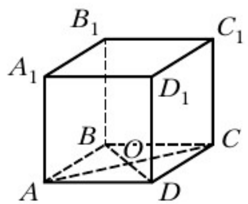


Рис. 12.6

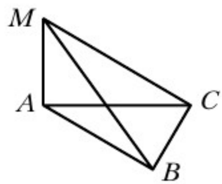
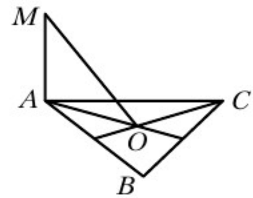


Рис. 12.7



12.8. Докажите, что равные наклонные, проведённые к плоскости из одной точки, образуют с этой плоскостью равные углы.

12.9. Докажите, что если углы, образованные с плоскостью наклонными, проведёнными к ней из одной точки, равны, то и сами наклонные равны.

12.10. Из точки M к плоскости α провели перпендикуляр MB и наклонные MA и MC. Найдите угол между прямой MC и плоскостью α, если $MA = 5\sqrt{2}$ см, $MC = 10$ см, а угол между прямой MA и плоскостью α равен $45°$.

12.11. Из точки A к плоскости α провели перпендикуляр AH и наклонные AB и AC, образующие с плоскостью соответственно углы $45°$ и $60°$. Найдите отрезок AB, если $AC = 4\sqrt{3}$ см.

12.12. Из точки D к плоскости α проведены наклонные DA и DB, образующие с данной плоскостью углы, равные $30°$. Угол между проекциями данных наклонных на плоскость α равен $120°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $DA = 2$ см.

12.13. Из точки B к плоскости α проведены наклонные BA и BC, образующие с данной плоскостью углы, равные $45°$. Расстояние между основаниями наклонных равно 16 см. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если угол между наклонными равен $60°$.

12.14. Точка A находится на расстоянии $3\sqrt{3}$ см от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью углы 60° и 45° соответственно, а угол между наклонными равен 90°. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

12.15. Из точки M к плоскости α проведены наклонные MA и MB. Наклонная MA образует с плоскостью α угол 45°, а наклонная MB – угол 30°. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $MA = 6$ см, а угол между наклонными равен 45°.

12.16. Точка M находится на расстоянии 12 см от каждой вершины квадрата $ABCD$, угол между прямой MA и плоскостью квадрата равен 60°. Найдите расстояние от точки M до стороны квадрата.

12.17. Точка M равноудалена от сторон квадрата $ABCD$, сторона которого равна $9\sqrt{6}$ см, и находится на расстоянии 9 см от плоскости квадрата. Найдите угол между прямой MA и плоскостью квадрата.

12.18. Дана точка D, такая, что прямые DA, DB и DC образуют с плоскостью правильного треугольника ABC углы по 45°. Найдите расстояние от точки D до вершин и до прямых, содержащих стороны треугольника ABC, если его сторона равна 6 см.

12.19. Точка P, равноудалённая от прямых, содержащих стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от его плоскости. Проекция точки P на плоскость треугольника ABC принадлежит этому треугольнику. Найдите угол между прямой PC и плоскостью ABC, если $AC = 12$ см, $BC = 16$ см.

12.20. Отрезок PB – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $PA = 16$ см, а угол между прямой PA и плоскостью ABC равен 30°.

12.21. Дан треугольник ABC, такой, что $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$ см. Отрезок MC – перпендикуляр к плоскости ABC. Расстояние от точки M до прямой AB равно $5\sqrt{3}$ см. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC.

12.22. Отрезок DA – перпендикуляр к плоскости правильного треугольника ABC, $AD = AB$, точка E – середина стороны BC. Найдите угол между:

1) прямой AB и плоскостью ADE;
2) прямой AC и плоскостью ABD.

12.23. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости данного квадрата $ABCD$, причём $MB = AB$. Найдите угол между:

1) прямой AB и плоскостью BMD;
2) прямой AM и плоскостью BMD.

12.24. Из точки A к плоскости α проведены две равные наклонные, угол между которыми равен 60°. Угол между проекциями данных наклонных на плоскость α равен 90°. Найдите угол между данными наклонными и плоскостью α.

12.25. Из точки B к плоскости β проведены две равные наклонные, угол между которыми прямой. Угол между проекциями данных наклонных на плоскость β равен 120°. Найдите косинус угла между данными наклонными и плоскостью β.

12.26. Из точки B к плоскости α проведена наклонная BA, образующая с этой плоскостью угол 45°. В плоскости α проведена прямая AC, образующая с проекцией отрезка AB на данную плоскость угол 30°. Найдите косинус угла BAC.

12.27. Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α, а его сторона AB образует с этой плоскостью угол 45°. Найдите угол между стороной AC и проекцией стороны AB на плоскость α, если $\angle BAC = 60^\circ$.

12.28. Точка M – середина ребра CD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой A_1M и плоскостью CDD_1, если $AD = 5$ см, $DC = 6$ см, $DD_1 = 4$ см.

12.29. Точка K – середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой C_1K и плоскостью DAA_1, если $AD = 2\sqrt{2}$ см, $DC = 3$ см, $DD_1 = 1$ см.

12.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой C_1D и плоскостью ACC_1.

12.31. Через вершину прямого угла проведена прямая, образующая с каждой из его сторон угол 60°. Найдите угол, который образует эта прямая с плоскостью прямого угла.

12.32. Через вершину угла, равного 60°, проведена прямая, образующая с каждой из его сторон угол 60°. Найдите косинус угла, который образует эта прямая с плоскостью данного угла.

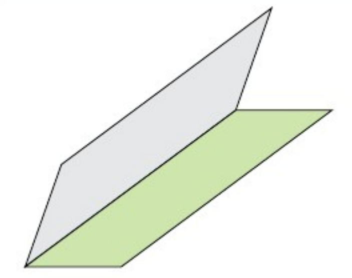
Упражнения для повторения

12.33. Стороны треугольника равны 2 см, $2\sqrt{7}$ см и $4\sqrt{3}$ см. Найдите угол треугольника, противолежащий его средней стороне.

12.34. Одна из сторон треугольника равна 35 см, а две другие стороны относятся как 3 : 8 и образуют угол 60°. Найдите неизвестные стороны треугольника.

§ 13. Двугранный угол. Угол между плоскостями

Рис. 13.1



На рисунке 13.1 изображена фигура, состоящая из двух полуплоскостей, имеющих общую границу. Эта фигура делит пространство на две части, выделенные на рисунке 13.2 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом**. Полуплоскости называют **гранями двугранного угла**, а их общую границу — **ребром двугранного угла**.

Как видим, «зелёный» и «голубой» двугранные углы, изображённые на рисунке 13.2, существенно различаются. Это различие выражается следующим свойством. На гранях двугранного угла выберем произвольные точки M и N (рис. 13.3). Отрезок MN принадлежит «зелёному» двугранному углу, а «голубому» двугранному углу принадлежат лишь концы отрезка.

Рис. 13.2

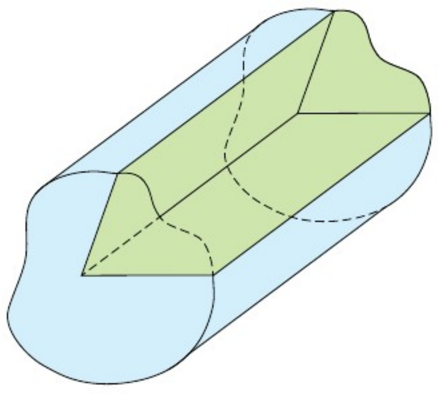
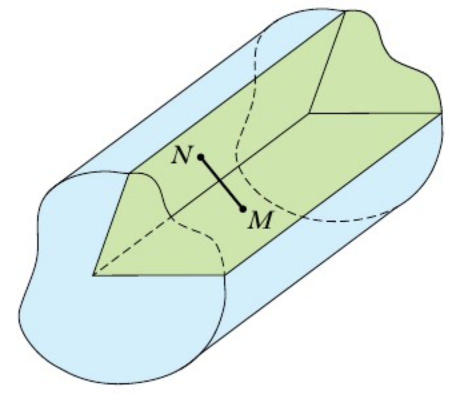


Рис. 13.3



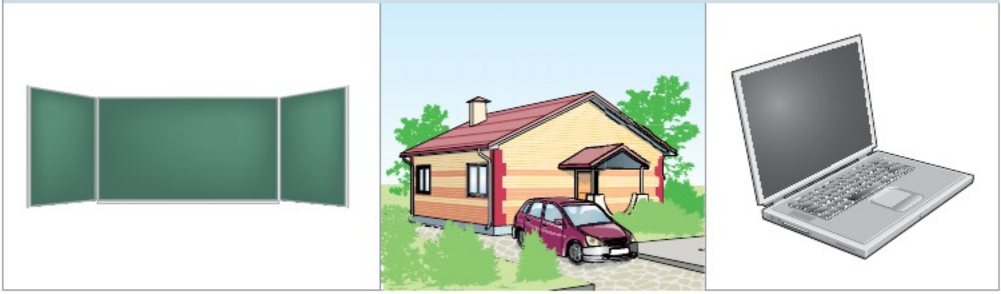
В дальнейшем, говоря «двугранный угол», будем подразумевать такой двугранный угол, который содержит любой отрезок с концами на его гранях.

Наглядное представление о двугранном угле дают полуоткрытая классная доска, двускатная крыша, открытый ноутбук (рис. 13.4).

Двугранный угол считают пространственным аналогом угла на плоскости.

Вы знаете, как определяют величину угла на плоскости. Научимся определять величину двугранного угла.

Рис. 13.4



Отметим на ребре MN двугранного угла произвольную точку O. Через точку O в гранях двугранного угла проведём лучи OA и OB перпендикулярно ребру MN (рис. 13.5). Угол AOB, образованный этими лучами, называют **линейным углом двугранного угла**. Поскольку $MN \perp OA$ и $MN \perp OB$, то $MN \perp AOB$. Таким образом, *если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость перпендикулярно ребру, то эта плоскость пересечёт двугранный угол по его линейному углу*.

Очевидно, что двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов (рис. 13.6). Стороны линейных углов, лежащие в одной грани, параллельны. Воспользовавшись теоремой 8.1, можно показать (сделайте это самостоятельно), что *любые два линейных угла данного двугранного угла равны*.

Рис. 13.5

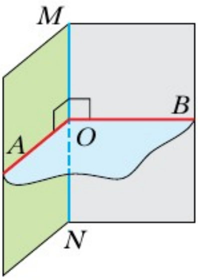
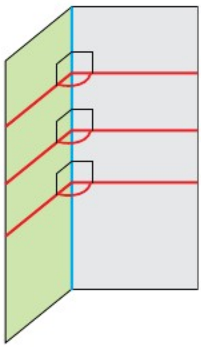


Рис. 13.6



Таким образом, величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла. Это свойство позволяет принять следующее определение.

Определение

Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

Двугранный угол называют острым, прямым, тупым или развёрнутым, если его линейный угол соответственно острый, прямой, тупой или развёрнутый.

Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.7). Двугранный угол с ребром DD_1, грани которого принадлежат плоскостям ADD_1 и CDD_1, является прямым. Действительно, поскольку $AD \perp DD_1$ и $CD \perp DD_1$, то угол ADC – линейный угол двугранного угла с ребром DD_1. Угол ADC прямой.

Итак, если φ – величина двугранного угла, то $0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла, отличные от развёрнутого (рис. 13.8). Здесь возможны два случая:

1) все четыре двугранных угла прямые (рис. 13.8, *а*);

2) из четырёх двугранных углов два равных угла острые и два равных угла тупые (рис. 13.8, *б*).

Рис. 13.7

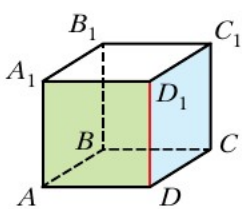
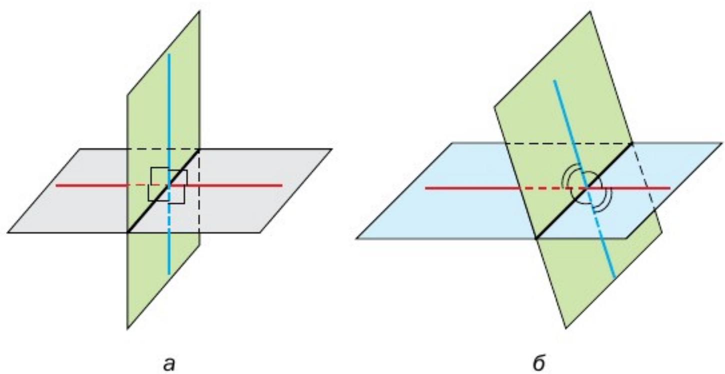


Рис. 13.8



В обоих случаях из четырёх двугранных углов найдётся такой, величина которого не превышает 90°.

Определение

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называют величину того из образовавшихся двугранных углов, который не превышает 90°.

Таким образом, если φ – угол между двумя пересекающимися плоскостями, то $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.

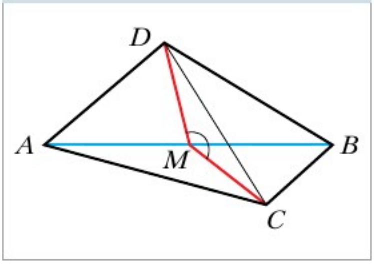
Угол между двумя параллельными плоскостями считают равным 0°. Итак, если φ – угол между двумя плоскостями, то $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Углом между многоугольником и плоскостью, которой многоугольник не принадлежит, называют угол между плоскостью, содержащей многоугольник, и данной плоскостью.

Углом между двумя многоугольниками, лежащими в разных плоскостях, называют угол между плоскостями, в которых лежат эти многоугольники.

Задача 1. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB, равное 16 см. Точка D не принадлежит плоскости ABC. Известно, что $DB = 17$ см, $BC = 10$ см, $DC = 3\sqrt{39}$ см. Найдите двугранный угол с ребром AB, грани которого содержат данные треугольники.

Рис. 13.9



Решение. Пусть точка M – середина отрезка AB (рис. 13.9). Соединим точку M с вершинами D и C. Поскольку треугольники ABC и ABD – равнобедренные с общим основанием AB, то $DM \perp AB$ и $CM \perp AB$. Следовательно, угол CMD – линейный угол искомого двугранного угла.

Для стороны DM прямоугольного треугольника DMB можно записать: $DM = \sqrt{DB^2 - MB^2}$. Поскольку $MB = 8$ см, $DB = 17$ см, то $DM = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$ (см).

Для стороны CM прямоугольного треугольника CMB можно записать: $CM = \sqrt{BC^2 - MB^2}$. Отсюда $CM = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Для стороны DC треугольника DMC запишем теорему косинусов: $DC^2 = DM^2 + CM^2 - 2DM \cdot CM \cos\angle DMC$.

Имеем: $351 = 225 + 36 - 180\cos\angle DMC$. Отсюда $\cos\angle DMC = -\frac{1}{2}$. Тогда $\angle DMC = 120^\circ$.

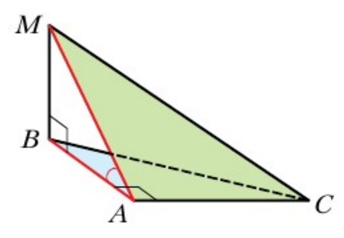
Ответ: 120°. ◄

Замечание. Если бы в задаче требовалось найти угол между плоскостями треугольников, то в ответе следовало бы записать 60°.

Задача 2. Прямоугольные треугольники ABC ($\angle A = 90^\circ$) и ABM ($\angle B = 90^\circ$) имеют общий катет AB (рис. 13.10). Отрезок MB перпендикулярен плоскости ABC. Известно, что $MB = 4$ см, $AC = 6$ см, $MC = 10$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и AMC.

Решение. Отрезок BA является проекцией наклонной MA на плоскость ABC. Поскольку $BA \perp AC$, то по теореме о трёх перпендикулярах $MA \perp AC$. Следовательно, угол MAB – линейный угол двугранного угла с ребром AC, грани которого принадлежат плоскостям ABC и AMC. Поскольку угол MAB острый, то угол между плоскостями ABC и AMC равен величине угла MAB.

Рис. 13.10



Для стороны AM прямоугольного треугольника AMC можно записать: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Отсюда $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Для угла MAB прямоугольного треугольника MAB можно записать: $\sin\angle MAB = \frac{MB}{MA}$. Отсюда $\sin\angle MAB = \frac{1}{2}$ и $\angle MAB = 30°$.

Ответ: $30°$. ◄

1. Опишите, какую фигуру называют двугранным углом.
2. Что называют гранями двугранного угла? ребром двугранного угла?
3. Какую фигуру называют линейным углом двугранного угла?
4. Что называют величиной двугранного угла?
5. Что называют углом между двумя пересекающимися плоскостями?
6. Чему равен угол между двумя параллельными плоскостями?
7. Что называют углом между: 1) многоугольником и плоскостью, которой многоугольник не принадлежит; 2) двумя многоугольниками, лежащими в разных плоскостях?

Упражнения

13.1. Приведите примеры, иллюстрирующие понятие «двугранный угол», используя предметы окружающей среды.

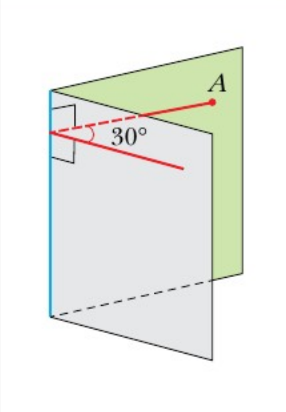
13.2. На одной из граней двугранного угла, величина которого равна $30°$, отмечена точка A (рис. 13.11). Расстояние от точки A до ребра двугранного угла равно 18 см. Чему равно расстояние от точки A до другой грани двугранного угла?

13.3. На одной из граней острого двугранного угла отмечена точка, расстояние от которой до другой грани равно $4\sqrt{3}$ см, а до ребра двугранного угла – 8 см. Какова величина данного двугранного угла?

13.4. На одной грани острого двугранного угла отметили точки A и D (рис. 13.12). Из точки A опустили перпендикуляры AB и AC соответственно на ребро и другую грань двугранного угла. Из точки D опустили перпендикуляры DE и DF соответственно на ребро и другую грань двугранного угла. Найдите отрезок DE, если $AB = 21$ см, $AC = 12$ см, $DF = 20$ см.

13.5. На одной грани острого двугранного угла отметили точки A и B, удалённые от другой его грани на 14 см и 8 см соответственно. Расстояние от точки A до ребра двугранного угла равно 42 см. Найдите расстояние от точки B до ребра двугранного угла.

Рис. 13.11



13.6. Точка B лежит внутри двугранного угла и удалена от его граней на $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{3}$ см, а от ребра – на 2 см. Найдите данный двугранный угол.

13.7. Точка C лежит внутри двугранного угла. Угол между перпендикулярами, опущенными из точки C на грани двугранного угла, равен 110°. Найдите данный двугранный угол.

13.8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.13).

1) Среди приведённых углов укажите линейный угол двугранного угла, грани которого принадлежат плоскостям ABC и AB_1C_1:

а) $\angle A_1AB$; б) $\angle A_1AB_1$; в) $\angle B_1DA$; г) $\angle B_1AB$; д) $\angle B_1DB$.

2) Найдите величину указанного двугранного угла.

13.9. Отрезок AD – перпендикуляр к плоскости правильного треугольника ABC (рис. 13.14), точка E – середина стороны BC. Среди приведённых углов укажите линейный угол двугранного угла, грани которого принадлежат плоскостям ABC и BCD:

1) $\angle ABD$; 2) $\angle AED$; 3) $\angle BAD$; 4) $\angle ACD$.

Рис. 13.12

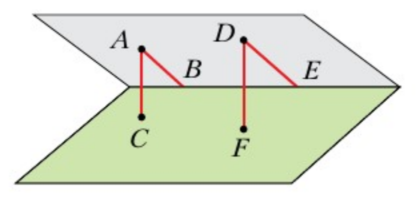


Рис. 13.13

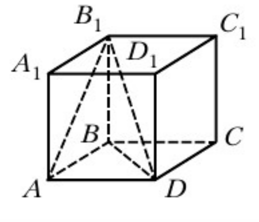
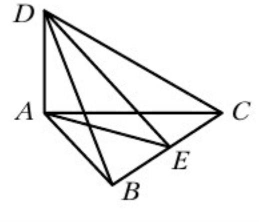


Рис. 13.14



13.10. Прямоугольники $ABCD$ и $BCEF$ лежат в разных плоскостях (рис. 13.15), причём прямая AF перпендикулярна плоскости ABC. Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные прямоугольники, если $AF = \sqrt{15}$ см, $CD = \sqrt{5}$ см.

13.11. Треугольники ABC и ACD лежат в разных плоскостях (рис. 13.16), причём прямая BD перпендикулярна плоскости ABC. Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные треугольники, если $\angle ACD = 90°$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см.

Рис. 13.15

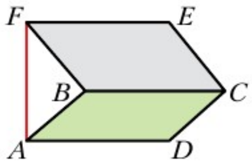
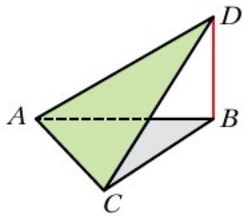


Рис. 13.16



13.12. Один из двугранных углов, образовавшихся при пересечении двух плоскостей, равен 130°. Найдите угол между данными плоскостями.

13.13. Даны плоскость α и параллельная ей прямая a. Сколько плоскостей можно провести через прямую a, таких, что угол φ между плоскостью α и проведённой плоскостью удовлетворяет условию:

1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

13.14. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости равностороннего треугольника ABC (рис. 13.17). Найдите угол между плоскостями ABM и CBM.

13.15. Отрезок CE – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 13.18). Найдите угол между плоскостями BCE и DCE.

Рис. 13.17

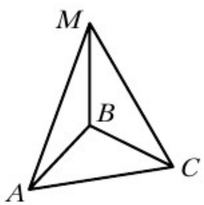


Рис. 13.18

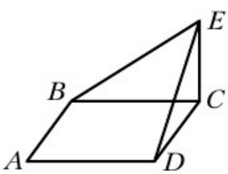
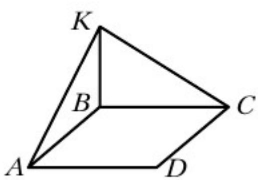


Рис. 13.19



13.16. Отрезок BK – перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$ (рис. 13.19), $\angle ABC = 100^\circ$. Найдите угол между плоскостями ABK и CBK.

13.17. Все рёбра тетраэдра $DABC$ равны, точка M – середина ребра CD. Докажите, что угол между плоскостями ACD и BCD равен углу AMB.

13.18. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом, $AD = \sqrt{3}$ см, $AA_1 = 3$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.

13.19. В гранях двугранного угла, равного 45°, проведены прямые, параллельные его ребру и удалённые от ребра на $2\sqrt{2}$ см и 3 см соответственно. Найдите расстояние между данными параллельными прямыми.

13.20. Плоскость α пересекает грани двугранного угла по параллельным прямым m и n. Расстояние от ребра двугранного угла до прямой m равно 3 см, до прямой n – 5 см, а расстояние между прямыми m и n – 7 см. Найдите данный двугранный угол.

13.21. Ребро DA тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 13.20), $AB = BC = AC = 8$ см, $BD = 4\sqrt{7}$ см. Найдите двугранный угол, грани которого содержат треугольники ABC и BCD.

13.22. Ребро DB тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 13.21), $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 7$ см, $AD = 7\sqrt{5}$ см. Найдите двугранный угол, грани которого содержат треугольники ABC и ACD.

Рис. 13.20

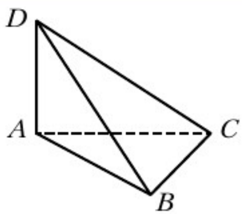
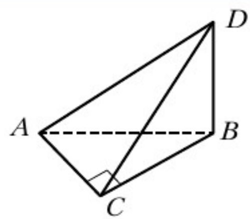


Рис. 13.21



13.23. Точка D равноудалена от вершин прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Найдите угол между плоскостями ABC и ACD, если $AC = BC = 2$ см, а точка D удалена от плоскости ABC на $\sqrt{3}$ см.

13.24. Точка D равноудалена от вершин равностороннего треугольника ABC. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 12$ см, а точка D удалена от плоскости ABC на 2 см.

13.25. Диагонали ромба $ABCD$ с тупым углом при вершине B равны 30 см и 40 см. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости ромба, $MB = 24$ см. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью CMD.

13.26. Отрезок MC – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$. Угол между плоскостью квадрата и плоскостью AMD равен $45°$. Найдите площадь квадрата, если точка M удалена от прямой AD на 10 см.

13.27. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен $30°$. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB = 15$ см, $BC = 9$ см.

13.28. Через основание AC равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость α. Угол между плоскостями α и ABC равен $45°$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 12$ см, $AB = 10$ см.

13.29. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина A удалена от этой плоскости на $2\sqrt{2}$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если $AB = 8$ см, $\angle ABC = 150°$.

13.30. Сторона AD ромба $ABCD$ лежит в плоскости α, а расстояние между прямой BC и этой плоскостью равно $7\sqrt{3}$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если сторона ромба равна 28 см, а $\angle BAD = 30°$.

13.31. Равнобедренные треугольники ABC и ABD, имеющие общее основание AB, лежат в гранях двугранного угла с ребром AB, величина которого равна $60°$. Найдите расстояние между точками C и D, если $AD = 10$ см, $AB = 16$ см, $\angle ACB = 90°$.

13.32. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях, $AB = BC = AD = CD = 4$ см, $AC = 6$ см, $BD = \sqrt{21}$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и ADC.

13.33. Точки A и C принадлежат разным граням двугранного угла, равного $120°$. Из точки A опустили перпендикуляр AB, а из точки C – перпендикуляр CD на ребро двугранного угла. Найдите отрезок AC, если $AB = 7$ см, $BD = 3$ см, $CD = 11$ см.

13.34. Из точек A и B, принадлежащих разным граням двугранного угла, опустили перпендикуляры AC и BD на его ребро. Найдите данный двугранный угол, если $AC = CD = BD = 2$ см, $AB = 2\sqrt{2}$ см.

13.35. Концы отрезка CD принадлежат разным граням двугранного угла, равного $30°$. Из точек C и D опустили перпендикуляры CE и DF на ребро двугранного угла. Найдите отрезок CE, если $CD = 5$ см, $DF = 4\sqrt{3}$ см, $EF = 2$ см.

13.36. Отрезок MA – перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и MCD, если $MA = AB$, $\angle ABC = 120°$.

13.37. Точка M – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями BMD и A_1BD.

13.38. Точка M равноудалена от вершин квадрата $ABCD$, точка O – центр данного квадрата, $MO = AC$. Точка K – середина отрезка MC. Найдите тангенс угла между плоскостями BMD и BKD.

13.39. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями BC_1D и AD_1C.

Упражнения для повторения

13.40. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD прямоугольника в точках M и K соответственно, $AC = 15$ см, $AK = 4$ см, $KD = 8$ см. Найдите площадь четырёхугольника $AMCK$.

13.41. Две стороны треугольника равны 15 см и 25 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, – 16 см. Найдите третью сторону треугольника.

§ 14. Перпендикулярные плоскости

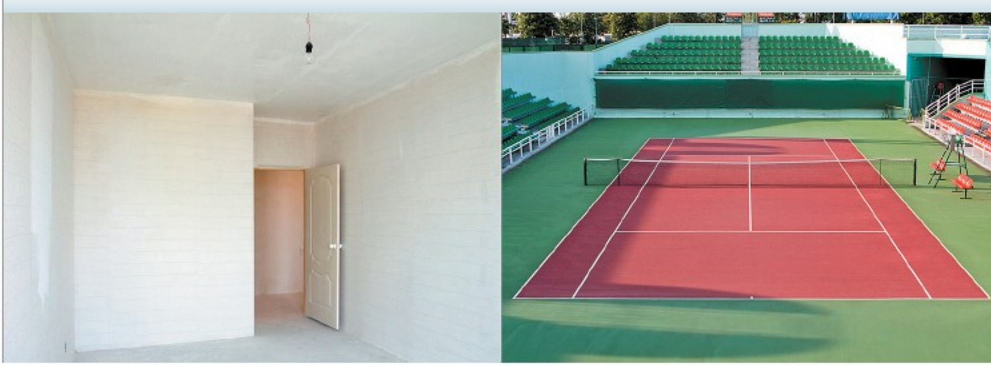
Определение

Две плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Если плоскости α и β перпендикулярны, то записывают: $\alpha \perp \beta$. Также принято говорить, что плоскость α перпендикулярна плоскости β или плоскость β перпендикулярна плоскости α.

Наглядное представление о перпендикулярных плоскостях дают плоскости стены и потолка комнаты, плоскости двери и пола, плоскости сетки и теннисного корта (рис. 14.1).

Рис. 14.1



Очевидно, что перпендикулярные плоскости при пересечении образуют четыре прямых двугранных угла (рис. 14.2).

Теорема 14.1
(признак перпендикулярности плоскостей)

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство

Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 14.3). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Пусть $\alpha \cap \beta = b$ и $a \cap b = B$. Выберем на прямой a произвольную точку A, отличную от точки B. Очевидно, что прямая AB перпендикулярна прямой b. В плоскости β проведём прямую BC перпендикулярно прямой b. Угол ABC является линейным углом двугранного угла с ребром b, грани которого принадлежат плоскостям α и β. Поскольку $AB \perp \beta$ и $BC \subset \beta$, то $AB \perp BC$, т. е. $\angle ABC = 90^\circ$. Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90°. ◄

Например, плоскость грани AA_1B_1B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.4) перпендикулярна плоскости грани $ABCD$. Действительно, плоскость AA_1B_1 проходит через прямую AA_1, перпендикулярную плоскости ABC.

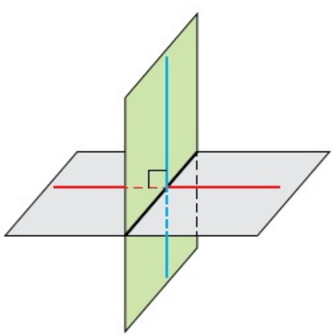


Рис. 14.2

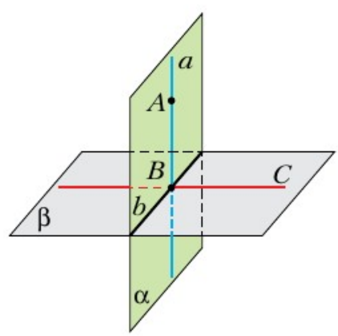


Рис. 14.3

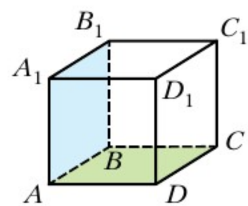


Рис. 14.4

Рассмотрим несколько свойств перпендикулярных плоскостей.

Теорема 14.2

Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, проведённая в одной плоскости перпендикулярно прямой пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство

Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α проведём прямую AB перпендикулярно прямой a, где $B \in a$ (рис. 14.5). Докажем, что $AB \perp \beta$.

В плоскости β проведём прямую BC перпендикулярно прямой a. Угол ABC является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями α и β. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то $\angle ABC = 90°$. Следовательно, прямая AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости β – прямой a и прямой BC. Значит, $AB \perp \beta$. ◄

Задача 1. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны и через точку одной из плоскостей проведена прямая перпендикулярно другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

Решение. Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 14.6). Рассмотрим произвольную точку A плоскости α. Через эту точку проведём прямую b, перпендикулярную плоскости β.

Рис. 14.5

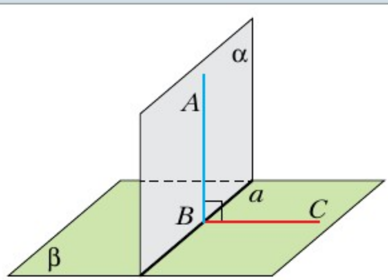
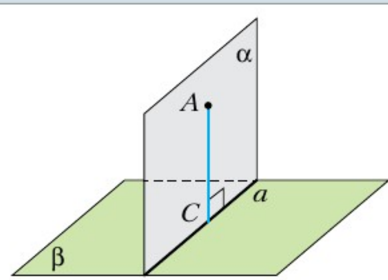


Рис. 14.6



В плоскости α через точку A проведём прямую AC перпендикулярно прямой a. По теореме 14.2 $AC \perp \beta$. Поскольку через точку A проходит лишь одна прямая, перпендикулярная плоскости β, то прямая AC и есть прямая b. ◄

Задача 2. Докажите, что если каждая из двух пересекающихся плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то прямая их пересечения перпендикулярна этой плоскости.

Решение. Пусть $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ (рис. 14.7). Докажем, что $a \perp \gamma$.

Через произвольную точку A прямой a проведём прямую a_1, перпендикулярную плоскости γ. Поскольку $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, то по ключевой задаче 1 получаем, что прямая a_1 принадлежит и плоскости α, и плоскости β. Следовательно, $a_1 = \alpha \cap \beta$. Значит, прямые a и a_1 совпадают, а это доказывает перпендикулярность прямой a и плоскости γ. ◄

Задача 3. Две плоскости ABD и CBD перпендикулярны плоскости ABC (рис. 14.8). Двугранный угол с ребром BD, грани которого содержат треугольники ABD и CBD, равен $120°$. Известно, что $AD = 20$ см, $CD = 13$ см, $BD = 12$ см. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BD и AC.

Рис. 14.7

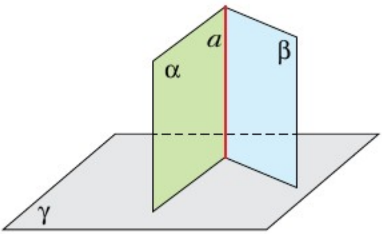
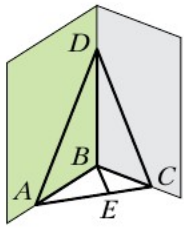


Рис. 14.8



Решение. В силу ключевой задачи 2 $BD \perp ABC$. Тогда $BD \perp AB$ и $BD \perp BC$. Следовательно, угол ABC – линейный угол двугранного угла, о котором говорится в условии задачи. По условию $\angle ABC = 120°$.

Проведём высоту BE треугольника ABC. Поскольку $BD \perp ABC$ и $BE \subset ABC$, то $BD \perp BE$. Следовательно, отрезок BE – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD и AC. Значит, его длина является искомым расстоянием. Имеем: $AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$ (см); $BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).

Для стороны AC треугольника ABC запишем теорему косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC$.

Отсюда $AC^2 = 256 + 25 - 160 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 361$; $AC = 19$ см.

Выразим высоту треугольника ABC, проведённую из вершины B, через длины его сторон. Для этого найдём площадь треугольника ABC двумя способами. С одной стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 20\sqrt{3}$ (см²). С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{19}{2}BE$. Приравняв полученные результаты, запишем $\frac{19}{2}BE = 20\sqrt{3}$, откуда $BE = \frac{40\sqrt{3}}{19}$ см.

Ответ: $\frac{40\sqrt{3}}{19}$ см. ◄

1. Какие плоскости называют перпендикулярными?
2. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
3. Сформулируйте свойства перпендикулярных плоскостей.

Упражнения

14.1. Приведите примеры, иллюстрирующие понятие «перпендикулярные плоскости», используя предметы окружающей обстановки.

14.2. На рисунке 14.9 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите, перпендикулярны ли плоскости:
1) $A_1B_1C_1$ и CDD_1;
2) ABC и $A_1B_1C_1$;
3) AA_1C_1 и ABC;
4) ACC_1 и BDD_1.

14.3. Верно ли утверждение:
1) если плоскости α и β перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в плоскости α, перпендикулярна плоскости β;
2) если плоскости α и β перпендикулярны, то плоскость α перпендикулярна любой прямой, параллельной плоскости β;
3) если две плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то эти плоскости параллельны?

14.4. Опишите, как можно построить плоскость, перпендикулярную двум другим пересекающимся плоскостям.

14.5. Плоскости прямоугольников $ABCD$ и $CBFE$ перпендикулярны (рис. 14.10).
1) Верно ли утверждение: а) $BF \perp AB$; б) $BE \perp BD$; в) $BE \perp AB$?

Рис. 14.9

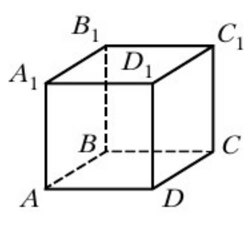
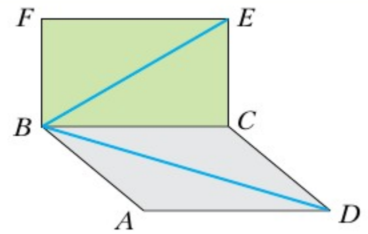


Рис. 14.10



2) Найдите расстояние от точки E до прямой AD и расстояние от точки D до прямой BF, если $AB = BF = 5$ см, $BC = 12$ см.

14.6. Плоскости правильных треугольников ABC и ADC перпендикулярны. Найдите угол между прямой BD и плоскостью ABC.

14.7. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общую гипотенузу AC, равную 6 см, а их плоскости перпендикулярны (рис. 14.11). Найдите расстояние между точками B и D.

14.8. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 14.12). Докажите перпендикулярность плоскостей:
1) ABM и ABC; 2) ABM и CBM; 3) AMB и AMD.

14.9. Отрезок AD – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $\angle ACB = 90^\circ$ (рис. 14.13). Докажите, что плоскости BCD и ACD перпендикулярны.

Рис. 14.11

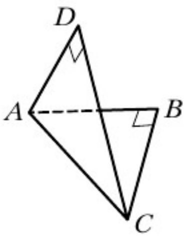


Рис. 14.12

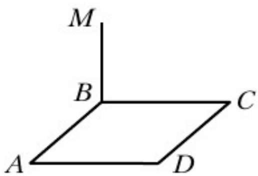
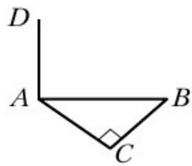


Рис. 14.13



14.10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M не принадлежит плоскости ABC (рис. 14.14). Докажите, что если $MA = MC$ и $MB = MD$, то плоскости ABC и BMD перпендикулярны.

Рис. 14.14

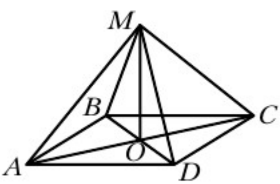
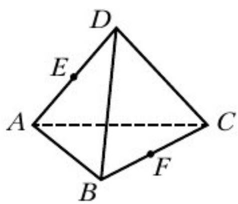


Рис. 14.15



14.11. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезок MO – перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что плоскости ABC и BMD перпендикулярны.

14.12. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и BC и перпендикулярной плоскости ABC.

14.13. Рёбра тетраэдра $DABC$ равны, точки E и F – середины рёбер AD и BC (рис. 14.15). Докажите перпендикулярность плоскостей: 1) ADF и BCD; 2) ADF и BCE.

14.14. Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 15 см и 16 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведённых из концов отрезка к линии пересечения данных плоскостей, равно 12 см. Найдите данный отрезок.

14.15. Точки A и B лежат в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Из точек A и B опустили перпендикуляры AC и BD на линию пересечения плоскостей α и β. Найдите расстояние от точки B до линии пересечения плоскостей α и β, если расстояние от точки A до этой линии равно 9 см, $AB = 17$ см, $CD = 12$ см.

14.16. Плоскости α и β перпендикулярны. Точка A лежит в плоскости α, точка B – в плоскости β. Точка A удалена от линии пересечения плоскостей α и β на 5 см, а точка B – на $5\sqrt{2}$ см. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, если угол между прямой AB и плоскостью β равен 30°.

14.17. Концы отрезка длиной 6 см принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 3 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует этот отрезок с данными плоскостями.

14.18. Плоскости трапеций $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием AD перпендикулярны, $\angle BAD = \angle EAD = 90^\circ$, $\angle ADC = \angle ADF = 60^\circ$, $CD = 4$ см, $DF = 8$ см. Найдите расстояние между: 1) прямыми BC и EF; 2) точками C и F.

14.19. Плоскости квадрата $ABCD$ и прямоугольника $AEFD$ перпендикулярны. Найдите расстояние между прямыми BC и EF, если площадь квадрата равна 25 см^2, а площадь прямоугольника – 60 см^2.

14.20. Докажите, что если плоскость и не лежащая в ней прямая перпендикулярны некоторой плоскости, то данные плоскость и прямая параллельны.

14.21. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

14.22. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AA_1 и перпендикулярной плоскости BDD_1.

14.23. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AD и перпендикулярной плоскости A_1BC.

14.24. Точка M – середина ребра A_1B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую AD и точку M.

2) Докажите, что плоскость сечения перпендикулярна плоскости CC_1D_1.

3) Найдите площадь сечения, если $AD = 10$ см, $AB = 8$ см, $AA_1 = 6$ см.

14.25. Точки E, F и M – середины соответственно рёбер BC, B_1C_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью EFM.

2) Докажите, что плоскость сечения перпендикулярна плоскости ABC.

3) Найдите площадь сечения, если $AD = 8$ см, $AA_1 = 12$ см, $AB = 6$ см.

14.26. Плоскости квадрата $ABCD$ и треугольника BEC перпендикулярны. Найдите угол между прямой DE и плоскостью ABC, если $AB = 4$ см, $BE = CE = 8$ см.

14.27. Плоскости квадрата $ABCD$ и треугольника AFB перпендикулярны, точка O – центр квадрата $ABCD$. Найдите расстояние от точки F до центра окружности, проходящей через точки C, D и O, если $AB = 10$ см, $AF = BF = 15$ см.

14.28. Плоскости квадратов $ABCD$ и $BEFD$ перпендикулярны, $AB = a$. Найдите расстояние между прямыми: 1) BE и DF; 2) BE и CD.

14.29. Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали AC так, что плоскости ABC и ADC оказались перпендикулярными. Найдите расстояние в новом положении между точками B и D, если $AB = 30$ см, $BC = 40$ см.

14.30. Параллелограмм $ABCD$ перегнули по диагонали BD так, что плоскости ABD и CBD оказались перпендикулярными. Найдите расстояние в новом положении между точками A и C, если $AB = 4$ см, $BD = 5$ см, $\angle ABD = 60^\circ$.

14.31. Точка M равноудалена от вершин равностороннего треугольника ABC и находится на расстоянии 8 см от его плоскости. Найдите расстояние от центра треугольника ABC до плоскости AMB, если сторона данного треугольника равна $12\sqrt{3}$ см.

14.32. Точка M равноудалена от вершин квадрата $ABCD$ и находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от его плоскости. Найдите расстояние от центра квадрата $ABCD$ до плоскости CMD, если сторона квадрата равна 4 см.

14.33. Плоскости равностороннего треугольника AMB и квадрата $ABCD$ перпендикулярны. Найдите угол между прямой MD и плоскостью ABC.

Упражнения для повторения

14.34. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

14.35. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 15 см, а сумма диагоналей — 42 см.

§ 15. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Рассмотрим теорему, устанавливающую связь между площадью данного многоугольника и площадью его проекции. Напомним, что речь идёт об ортогональной проекции.

Теорема 15.1

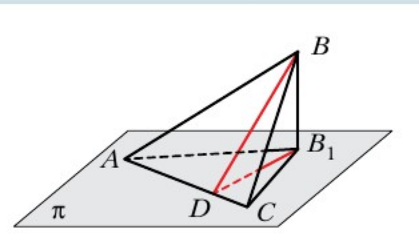
Площадь проекции выпуклого многоугольника равна произведению его площади и косинуса угла α между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции, где $0° \leqslant \alpha < 90°$.

Доказательство

Пусть S — площадь проецируемого многоугольника, $S_{\text{пр}}$ — площадь его проекции. Докажем, что $S_{\text{пр}} = S\cos\alpha$.

Из ключевой задачи 7.24 следует, что если две плоскости параллельны, то проекции многоугольника на эти плоскости являются равными фигурами. Поэтому при доказательстве теоремы 15.1 плоскость проекции можно заменить на любую ей параллельную плоскость. Из задачи 7.24 так же следует справедливость теоремы 15.1 для $\alpha = 0°$.

Рис. 15.1



Вначале докажем теорему для частного случая, когда проецируемым многоугольником является треугольник, одна из сторон которого параллельна плоскости проекции.

Заменим плоскость проекции на параллельную ей плоскость π, содержащую указанную сторону треугольника (рис. 15.1).

Из точки B опустим перпендикуляр BB_1 на плоскость π. Тогда треугольник AB_1C является проекцией треугольника ABC на плоскость π. Проведём высоту BD треугольника ABC. Соединим точки D и B_1 (см. рис. 15.1).

Отрезок B_1D является проекцией наклонной BD на плоскость π. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B_1D \perp AC$. Следовательно, угол BDB_1 – линейный угол двугранного угла с ребром AC и гранями, принадлежащими плоскостям ABC и π. Поскольку угол BDB_1 острый, то его величина равна углу между плоскостями ABC и π, т. е. равна α.

Имеем: $\angle BDB_1 = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BDB_1 запишем: $B_1D = BD\cos\alpha$.

Получаем: $S_{AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1D = \frac{1}{2}AC \cdot BD\cos\alpha = S_{ABC} \cdot \cos\alpha$. Итак, мы доказали, что $S_{\text{пр}} = S\cos\alpha$.

Рассмотрим треугольник ABC, у которого ни одна из сторон не параллельна плоскости проекции π. Через каждую вершину треугольника проведём прямую, параллельную прямой пересечения плоскостей ABC и π (рис. 15.2). Одна из этих прямых разбивает треугольник на два треугольника, имеющих общую сторону, параллельную плоскости проектирования. На рисунке 15.2 это треугольники ABM и ACM. Для этих треугольников теорема уже доказана. Пусть площади треугольников ABM и ACM равны S_1 и S_2. Тогда площади их проекций соответственно равны $S_1\cos\alpha$ и $S_2\cos\alpha$. Имеем:

$$S_{\text{пр}} = S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha = (S_1 + S_2)\cos\alpha = S\cos\alpha.$$

Рис. 15.2

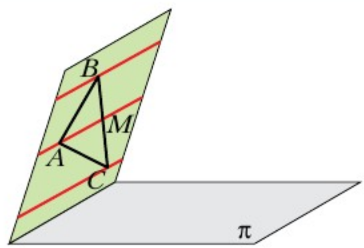
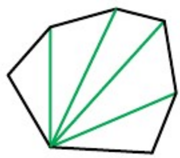


Рис. 15.3



Рассмотрим теперь общий случай. Разобьём данный выпуклый многоугольник на треугольники. Это можно сделать, например, проведя диагонали из одной вершины (рис. 15.3). Таким образом, мы разбили данный выпуклый многоугольник на n треугольников, для каждого из которых выполняется доказываемая теорема. Пусть площади полученных треугольников равны $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Тогда площади их проекций соответственно равны $S_1\cos\alpha, S_2\cos\alpha, \ldots, S_n\cos\alpha$. Имеем:

$$S_{\text{пр}} = S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha + \ldots + S_n\cos\alpha = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\cos\alpha = S\cos\alpha. \blacktriangleleft$$

Замечание. Теорема 15.1 остаётся справедливой и для невыпуклых многоугольников. Для доказательства следует показать, что любой многоугольник можно разбить на треугольники. Доказательство этого факта выходит за рамки рассматриваемого курса.

Сформулируйте теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.

Упражнения

15.1. Может ли площадь проекции многоугольника быть равной площади самого многоугольника?

15.2. Может ли площадь проекции многоугольника быть больше, чем площадь самого многоугольника?

15.3. Найдите площадь проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна $18\sqrt{2}$ см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен $45°$.

15.4. Найдите площадь многоугольника, если площадь его проекции на некоторую плоскость равна 24 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен $30°$.

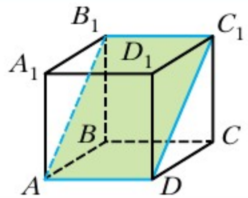
15.5. Площадь многоугольника равна 20 см^2, а площадь его проекции — 16 см^2. Найдите угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

15.6. Многоугольник F_1 — проекция многоугольника F на некоторую плоскость. Заполните таблицу.

Площадь многоугольника F	Угол между плоскостями многоугольников F и F_1	Площадь многоугольника F_1
12 см^2	60°	
	45°	8 см^2
32 см^2		$16\sqrt{3}$ см^2

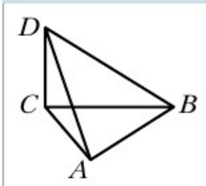
15.7. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображённого на рисунке 15.4, равно 2 см. Используя теорему о площади ортогональной проекции, вычислите площадь сечения AB_1C_1D.

Рис. 15.4



15.8. Отрезок DC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (рис. 15.5). Найдите площадь треугольника ADB, если $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$ см, $BC = 10$ см, а угол между плоскостями ABC и ABD равен 45°.

Рис. 15.5



15.9. Основания равнобокой трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона — 8 см. Найдите площадь проекции данной трапеции на плоскость α, если угол между плоскостью трапеции и плоскостью α равен 30°.

15.10. Через одну из сторон ромба, диагонали которого равны 6 см и 12 см, проведена плоскость α, образующая с плоскостью ромба угол 30°. Найдите площадь проекции данного ромба на плоскость α.

15.11. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 12 см, а стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны 10 см, 10 см и 12 см. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

15.12. Сторона правильного шестиугольника равна 2 см, а площадь его проекции — 9 см^2. Найдите угол между плоскостью данного шестиугольника и плоскостью его проекции.

15.13. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC на плоскость α, треугольник $A_2B_2C_2$ — проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника $A_2B_2C_2$.

15.14. Угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции равен 60°. Найдите площадь данного многоугольника, если сумма площадей этого многоугольника и его проекции равна 30 см^2.

15.15. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через ребро AD и образующей угол α с плоскостью ABC.

15.16. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом. Точка M — середина ребра AB, точка K — середина ребра AD. Через прямую MK проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол α и пересекающая три боковых ребра параллелепипеда. Площадь получившегося сечения параллелепипеда равна S. Найдите отрезок AB.

15.17. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1 см. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC. Известно, что

$A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Докажите, что угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ больше $60°$.

Упражнения для повторения

15.18. В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

15.19. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

Когда сделаны уроки

«Стереометрическое» расположение двух прямых

Для успешного изучения стереометрии важно развивать пространственное воображение. Этому во многом способствует решение задач, связанных с «чисто стереометрическим» расположением двух прямых в пространстве. Возможно, вы уже догадались, что речь пойдёт о скрещивающихся прямых.

В ключевой задаче 6.25 было установлено важное и полезное свойство – через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

Задача 1. Докажите, что середины всех отрезков, концы которых лежат на двух скрещивающихся прямых, лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть α и β – параллельные плоскости, в которых лежат данные прямые a и b (рис. 15.6). Рассмотрим плоскость γ, равноудалённую от плоскостей α и β (рис. 15.7). Очевидно, что середина C отрезка AB, соединяющего произвольную точку A плоскости α с произвольной точкой B плоскости β, принадлежит плоскости γ (рис. 15.7). Это касается в том числе и отрезков, концы которых лежат на данных скрещивающихся прямых. ◄

Рис. 15.6

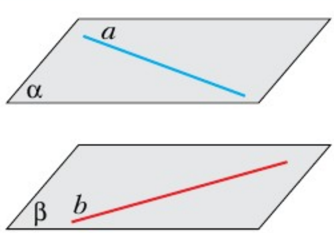
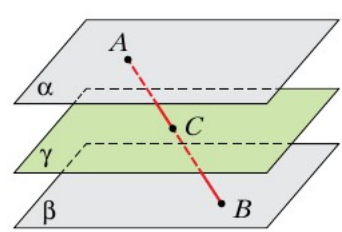


Рис. 15.7



Вообще имеет место следующий факт: множество середин всех отрезков, концы которых лежат на двух скрещивающихся прямых, образует плоскость. Докажите этот факт самостоятельно.

В § 10 было установлено, что любые две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр. Рассмотрим важное свойство этого общего перпендикуляра.

Задача 2. Докажите, что произвольный отрезок, соединяющий точки, лежащие на двух скрещивающихся прямых, не меньше их общего перпендикуляра.

Решение. Проведём параллельные плоскости α и β, в которых лежат данные скрещивающиеся прямые a и b. Пусть отрезок AB соединяет точки A и B этих прямых (рис. 15.8) и точка A_1 является проекцией точки A на плоскость β. Тогда $AB \geqslant AA_1$. Осталось отметить, что отрезок AA_1 равен общему перпендикуляру данных скрещивающихся прямых. ◄

Задача 3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a (рис. 15.9). Найдите расстояние между прямыми A_1C_1 и B_1C.

Решение. Проведём плоскости ACB_1 и A_1C_1D (см. рис. 15.10). Согласно ключевой задаче 11.27 диагональ BD_1 перпендикулярна каждой из этих плоскостей. Поэтому расстояние между прямыми A_1C_1 и B_1C равно длине отрезка прямой BD_1, заключённого между проведёнными плоскостями ACB_1 и A_1C_1D. Найдём длину этого отрезка.

Рис. 15.8

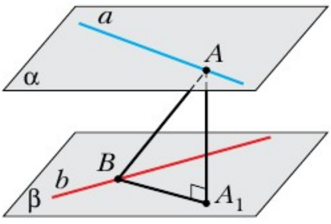


Рис. 15.9

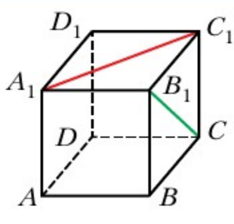
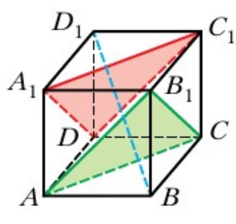


Рис. 15.10



Обозначим через N и M центры квадратов ABB_1A_1 и DCC_1D_1 соответственно (рис. 15.11). В плоскости A_1BC проведём отрезки A_1M и NC. Ясно, что отрезок A_1M лежит в плоскости A_1C_1D, а отрезок NC – в плоскости ACB_1. Поскольку прямые A_1M и NC параллельны (рис. 15.12), то отрезок BD_1 при пересечении с прямыми A_1M и NC делится на три равные части. Это означает, что длина отрезка прямой BD_1, заключённого между плоскостями ACB_1 и A_1C_1D, равна $\frac{BD_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. ◄

Помимо общего перпендикуляра, для поиска расстояния между скрещивающимися прямыми удобно использовать следующее соображение. Пусть AB – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b (рис. 15.13). Проведём через точку A плоскость γ, перпендикулярную прямой a, и спроектируем прямые a и b на эту плоскость. При таком проектировании проекцией прямой a является точка A, а прямой b – прямая b_1, являющаяся линией пересечения плоскостей β и γ. Отрезок AB лежит в плоскости γ и является перпендикуляром к прямой b_1. Поэтому расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от точки, в которую проектируется прямая a, до проекции прямой b. Ясно, что это утверждение является верным и в том случае, когда плоскостью проекции является произвольная плоскость, перпендикулярная прямой a.

Рис. 15.11

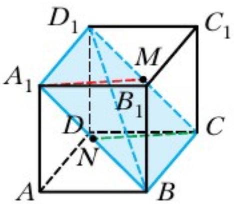


Рис. 15.12

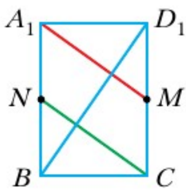
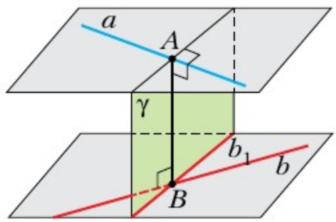


Рис. 15.13



Покажем, как работает описанное построение на примере уже рассмотренной задачи 3 (см. рис. 15.9).

Решение задачи 3. Спроектируем куб на плоскость ABC_1, перпендикулярную отрезку B_1C (рис. 15.14). Тогда проекцией куба будет прямоугольник ABC_1D_1, причём прямая B_1C спроектируется в точку K – середину стороны BC_1 прямоугольника, а прямая A_1C_1 – в прямую MC_1, где M – середина стороны AD_1 прямоугольника (рис. 15.15). Имеем:

Рис. 15.14

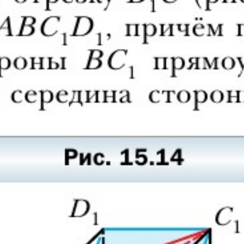
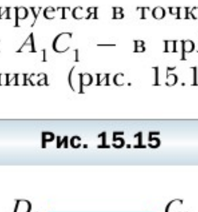


Рис. 15.15



$MD_1 = \frac{AD_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $MC_1 = \sqrt{MD_1^2 + D_1C_1^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Таким образом, расстояние между прямыми A_1C_1 и B_1C равно расстоянию d от точки K до прямой MC_1 (см. рис. 15.15). Имеем:

$$d = KC_1 \sin\angle KC_1M = KC_1 \cdot \frac{KM}{MC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.

2. Верно ли, что через каждую точку пространства можно провести прямую так, чтобы она пересекала две данные скрещивающиеся прямые?

3. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c, не параллельные одной плоскости. Докажите, что: 1) существует прямая, пересекающая прямые a, b и параллельная прямой c; 2) такая прямая единственная.

4. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Докажите, что существует четырёхугольная призма, три ребра которого лежат на данных прямых.

5. Ребро CD тетраэдра $DABC$ перпендикулярно основанию ABC. Точка M – середина ребра DB, точка N – середина ребра AB, точка K делит ребро CD в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. Докажите, что прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и A_1B.

7. В пирамиде $DABC$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Итоги главы 3

Угол между прямыми в пространстве

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину того из углов, образовавшихся при их пересечении, который не превосходит $90°$.

Угол между двумя параллельными прямыми считают равным $0°$.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Угол между двумя пересекающимися прямыми равен углу между двумя другими пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Угол между скрещивающимися прямыми a и b равен углу между пересекающимися прямыми a и b_1, где $b_1 \parallel b$.

Две прямые в пространстве называют перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямую называют перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.

Симметрия относительно плоскости

Точки M и M_1 называют симметричными относительно плоскости α, если отрезок MM_1 перпендикулярен этой плоскости и делится этой плоскостью пополам. Каждую точку плоскости α считают симметричной самой себе.

Фигуру называют симметричной относительно плоскости α, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно плоскости α, также принадлежит

этой фигуре. Плоскость α называют плоскостью симметрии фигуры.

Ортогональная проекция фигуры

Пусть фигура F_1 — параллельная проекция фигуры F на плоскость α в направлении прямой l. Если $l \perp \alpha$, то фигуру F_1 называют ортогональной проекцией фигуры F на плоскость α.

Свойство перпендикуляра и наклонной

Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то длина наклонной больше длины перпендикуляра.

Расстояние от точки до плоскости

Если точка не принадлежит плоскости, то расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то считают, что расстояние от точки до плоскости равно нулю.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называют расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Проведём через данные скрещивающиеся прямые a и b параллельные плоскости α и β. Расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b называют расстояние между плоскостями α и β.

Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок, который перпендикулярен этим прямым и концы которого лежат на этих прямых.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Теорема о трёх перпендикулярах

Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

Угол между прямой и плоскостью

Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным $0°$.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным $90°$.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то углом между такой прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Величина двугранного угла

Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называют величину того из образовавшихся двугранных углов, который не превышает $90°$.

Перпендикулярные плоскости

Две плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

Признак перпендикулярности плоскостей

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Свойство перпендикулярных плоскостей

Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, проведённая в одной плоскости перпендикулярно прямой пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

Площадь проекции выпуклого многоугольника равна произведению его площади и косинуса угла α между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции, где $0^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ$.

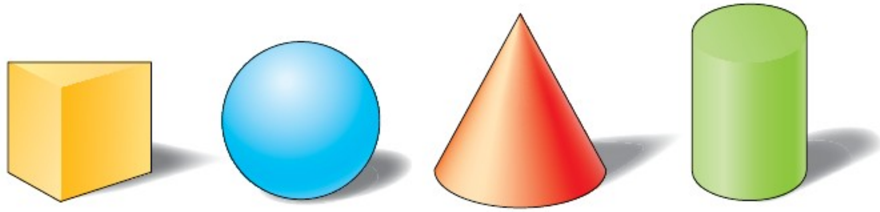
Глава 4. Многогранники

В этой главе вы уточните и расширите свои знания о многогранниках. Получите новые сведения о призме, пирамиде и их частных видах. Ознакомитесь с новым для вас многогранником — усечённой пирамидой.

§ 16. Призма

На рисунке 16.1 изображены знакомые вам пространственные фигуры. Каждая из этих фигур имеет конечные размеры и состоит из поверхности (границы фигуры) и части пространства, ограниченной этой поверхностью.

Рис. 16.1



Многогранник, шар, конус, цилиндр относят к фигурам, которые называют **геометрическими телами** или просто **телами**.

Не всякая фигура в пространстве является телом. Например, прямая, плоскость, двугранный угол не являются телами. Эти фигуры неограниченны. Тело же – ограниченная фигура. Однако и не каждая ограниченная фигура является телом. На рисунке 16.2 изображены примеры ограниченных

Рис. 16.2

Фигура F — объединение двух шаров

а

Фигура G — объединение двух шаров и отрезка

б

фигур F и G, не являющихся телами. Строгое определение тела выходит за рамки рассматриваемого курса. Более подробно о теле вы сможете прочитать на с. 179.

Определение

Многогранником называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

С такими элементами многогранника, как грани, рёбра и вершины, вы уже знакомы.

Две грани многогранника называют **соседними**, если у них есть общее ребро. Например, грани $A_1B_1C_1D_1$ и A_1B_1BA куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.3) являются соседними, так как ребро A_1B_1 у них общее.

Пусть точка M – вершина многогранника. Угол с вершиной M на грани многогранника называют **плоским углом многогранника при вершине M**. Например, на рисунке 16.3 угол DAB является плоским углом куба при вершине A.

Двугранным углом многогранника при ребре AB называют двугранный угол с ребром AB, грани которого содержат соседние грани многогранника, для которых ребро AB является общим (рис. 16.4).

Рис. 16.3

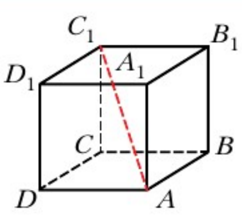
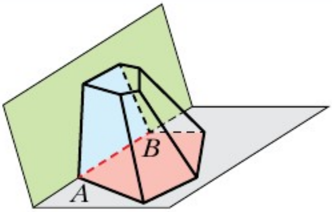


Рис. 16.4



Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют **диагональю многогранника**. Например, отрезок AC_1 – диагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 16.3).

Многогранники бывают выпуклыми и невыпуклыми.

Определение

Многогранник называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Куб и тетраэдр – примеры выпуклых многогранников. На рисунке 16.5 изображены невыпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Однако если каждая грань многогранника – выпуклый многоугольник, то этот многогранник не обязательно является выпуклым (рис. 16.6).

Рис. 16.5

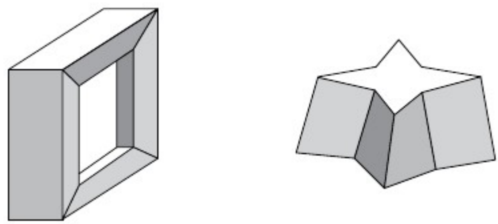
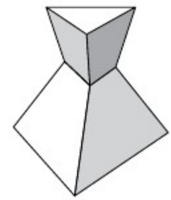


Рис. 16.6



Площадью поверхности многогранника называют сумму площадей всех его граней.

Подробнее остановимся на уже знакомом вам виде многогранника – призме.

Определение

Многогранник, две грани которого — равные *n*-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные *n* граней — параллелограммы, называют *n*-угольной призмой (рис. 16.7)**.**

Напомним, что параллелограммы, о которых говорится в определении, называют боковыми гранями призмы; равные *n*-угольники – основаниями призмы; стороны оснований – рёбрами оснований призмы; рёбра, не принадлежащие основаниям, – боковыми рёбрами призмы (рис. 16.7).

Рис. 16.7

Поскольку соседние боковые грани призмы – параллелограммы, имеющие общую сторону – боковое ребро, то *все боковые рёбра призмы равны и параллельны*.

Высотой призмы называют перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки плоскости одного основания на плоскость другого основания (рис. 16.8). Длина высоты призмы равна расстоянию между плоскостями её оснований.

Определение

Призму называют прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

Например, прямоугольный параллелепипед является частным случаем прямой призмы.

Каждое боковое ребро прямой призмы является её высотой. Все боковые грани прямой призмы – прямоугольники.

Если призма не является прямой, то её называют **наклонной**.

Определение

Призму называют правильной, если она является прямой и её основание — правильный многоугольник.

Например, куб является частным случаем правильной четырёхугольной призмы.

На рисунке 16.9 изображены правильные треугольная и шестиугольная призмы.

Рис. 16.8

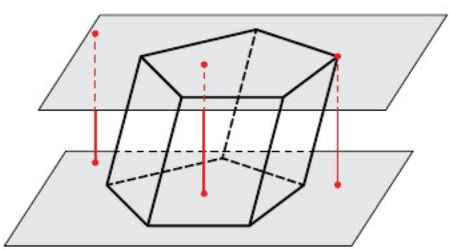
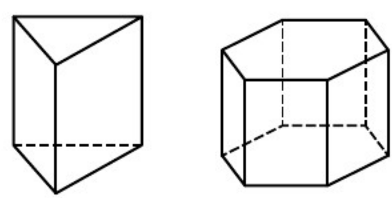


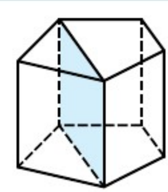
Рис. 16.9



Рассмотрим выпуклую n-угольную призму ($n > 3$). Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, пересекает основания призмы по диагоналям (рис. 16.10). Такое сечение называют **диагональным сечением призмы**.

Диагональным сечением любой призмы является параллелограмм, а прямой призмы – прямоугольник (докажите это самостоятельно).

Рис. 16.10



Площадью боковой поверхности призмы называют сумму площадей всех её боковых граней.

Очевидно, что выполняется следующее равенство:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь поверхности призмы (ещё говорят: площадь полной поверхности призмы), $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности призмы, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания призмы.

Теорема 16.1

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра призмы.

Доказательство

Каждая боковая грань прямой призмы – прямоугольник, одна сторона которого – ребро основания, а другая – боковое ребро. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – длины рёбер основания призмы, b – длина бокового ребра. Тогда $S_{\text{бок}} = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b$. Поскольку сумма, записанная в скобках, равна периметру основания призмы, то теорема доказана. ◄

Результат теоремы 16.1 удобно представить в виде одной из формул:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot b$$
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$$

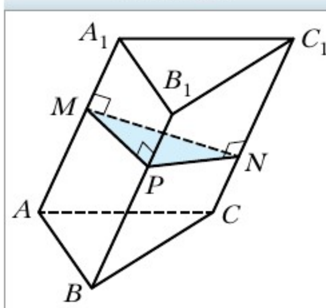
где $P_{\text{осн}}$ – периметр основания прямой призмы, b – длина бокового ребра, h – длина высоты призмы.

<u>**Задача.**</u> В наклонной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Докажите, что площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра сечения и бокового ребра.

Решение. Доказательство проведём для треугольной призмы. Для других n-угольных призм, где $n > 3$, доказательство будет аналогичным.

Пусть треугольник MNP – сечение, о котором говорится в условии задачи (рис. 16.11).

Рис. 16.11



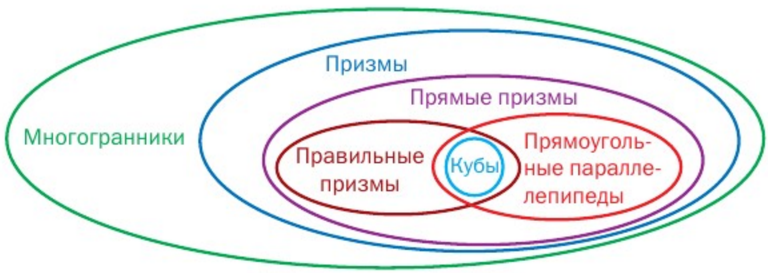
Докажем, что $S_{бок} = P_{MNP} \cdot AA_1$. Имеем: $AA_1 \perp MPN$. Следовательно, $AA_1 \perp MP$. Тогда отрезок MP – высота параллелограмма AA_1B_1B. Аналогично можно доказать, что отрезки PN и NM соответственно высóты параллелограммов CC_1B_1B и CC_1A_1A.

Поскольку площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны параллелограмма, к которой проведена высота, то можно записать:

$S_{бок} = MN \cdot AA_1 + MP \cdot BB_1 + PN \cdot CC_1$. Поскольку $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то $S_{бок} = MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 = (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MPN} \cdot AA_1$. ◄

Связь между многогранниками, изученными в этом параграфе, иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 16.12.

Рис. 16.12



1. Что называют многогранником?
2. Какие грани многогранника называют соседними?
3. Что называют двугранным углом многогранника?
4. Какой многогранник называют выпуклым?
5. Что называют призмой?
6. Что называют высотой призмы?
7. Какую призму называют прямой? наклонной?
8. Какую призму называют правильной?
9. Что называют диагональным сечением призмы?
10. Что называют площадью боковой поверхности призмы?
11. Чему равна площадь боковой поверхности прямой призмы?

Упражнения

16.1. Какое наименьшее количество граней может иметь призма? Сколько эта призма имеет: 1) вершин; 2) рёбер; 3) боковых рёбер?

16.2. Призма имеет 12 граней. Какой многоугольник лежит в её основании?

16.3. В какой призме боковые рёбра параллельны её высоте?

16.4. Докажите утверждение: если две соседние грани призмы перпендикулярны плоскости её основания, то данная призма является прямой. Будет ли данное утверждение верно, если из его формулировки исключить слово «соседние»?

16.5. Верно ли утверждение:

1) боковое ребро прямой призмы перпендикулярно любой диагонали её основания;

2) если все рёбра призмы равны, то она является правильной;

3) если все рёбра прямой призмы равны, то она является правильной?

16.6. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, один из углов которой равен $110°$ (рис. 16.13). Найдите двугранные углы при боковых рёбрах призмы.

16.7. Докажите, что в любой призме количество вершин является чётным числом, а количество рёбер – числом, кратным 3.

16.8. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 3 см, а высота – $3\sqrt{6}$ см. Найдите диагональ призмы.

16.9. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 5 см, а диагональ боковой грани – 13 см. Найдите высоту призмы.

16.10. Точки D и E – середины рёбер AC и BC соответственно правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.14). Плоскость, проходящая через прямую DE и образующая с плоскостью ABC угол $30°$, пересекает ребро CC_1 в точке F. Найдите площадь образовавшегося сечения призмы, если сторона её основания равна 12 см.

Рис. 16.13

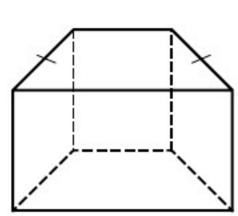
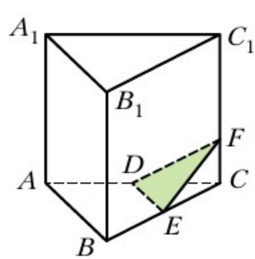
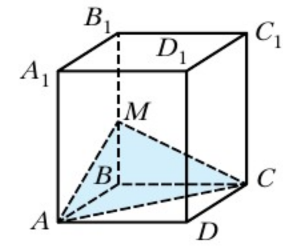


Рис. 16.14



16.11. Через диагональ AC основания правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол 45° и пересекающая ребро BB_1 в точке M (рис. 16.15). Найдите площадь образовавшегося сечения призмы, если сторона её основания равна 8 см.

Рис. 16.15



16.12. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, высота которой равна 6 см, а основанием является параллелограмм со сторонами 2 см и 3 см.

16.13. Найдите сторону основания правильной семиугольной призмы, высота которой равна 10 см, а площадь боковой поверхности — 420 см^2.

16.14. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы, сторона основания которой равна a, а высота равна H.

16.15. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна a, а высота равна H.

16.16. Угол между боковым ребром и плоскостью основания наклонной призмы равен 30°, высота призмы равна 10 см. Найдите боковое ребро призмы.

16.17. В наклонной четырёхугольной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если данное сечение является ромбом со стороной 5 см, а боковое ребро призмы равно 8 см.

16.18. В наклонной треугольной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Найдите боковое ребро призмы, если данное сечение является прямоугольным треугольником с катетами 9 см и 12 см, а площадь боковой поверхности призмы равна 288 см^2.

16.19. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a, а угол между диагональю призмы и боковой гранью равен 30°. Найдите: 1) высоту призмы; 2) угол между диагональю призмы и плоскостью основания.

16.20. Найдите диагонали правильной шестиугольной призмы, каждое ребро которой равно a.

16.21. Основание прямой призмы — ромб со стороной a и острым углом α. Бо́льшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β. Найдите диагонали призмы.

16.22. Основанием прямой призмы, диагонали которой равны 10 см и 16 см, является ромб. Найдите сторону основания призмы, если её высота равна 4 см.

16.23. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$) является основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$. Через прямую CC_1 проведена плоскость, перпендикулярная прямой AB и пересекающая ребро AB в точке D. Найдите площадь получившегося сечения призмы, если $AD = 18$ см, $BD = 2$ см, а высота призмы равна 8 см.

16.24. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$) является основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, отрезок CM – медиана треугольника ABC. Высота призмы равна гипотенузе её основания. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через прямые CC_1 и CM, если $AC = 30$ см, $BC = 40$ см.

16.25. Каждое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Найдите:

1) площадь сечения призмы, проходящего через точки A, B и C_1;

2) угол между плоскостью данного сечения и плоскостью основания призмы.

16.26. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$) является основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость, проходящая через прямую AC, образует с плоскостью основания призмы угол β и пересекает ребро BB_1 в точке D. Найдите площадь образовавшегося сечения, если $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

16.27. Основанием прямой призмы является ромб с острым углом α, бóльшая диагональ ромба равна d. Через меньшую диагональ нижнего основания и вершину острого угла верхнего основания провели плоскость, образующую с плоскостью нижнего основания призмы угол β. Найдите:

1) высоту призмы;

2) площадь образовавшегося сечения призмы.

16.28. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2 см, а боковое ребро – 6 см. Диагонали боковой грани AA_1B_1B пересекаются в точке D. Найдите угол между прямой CD и плоскостью ABC.

16.29. Сторона основания правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 см, а боковое ребро – $\sqrt{5}$ см. Диагонали боковой грани CC_1D_1D пересекаются в точке M. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC.

16.30. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 5 см, 12 см и 13 см, а площадь полной поверхности – 270 см^2. Найдите высоту призмы.

16.31. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы равна 96 см^2, а площадь полной поверхности – 128 см^2. Найдите высоту призмы.

16.32. Вычислите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы, диагональ которой равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.

16.33. Площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной призмы равна S. Чему равна площадь боковой поверхности призмы?

16.34. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 5 см, а диагональ боковой грани — 4 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

16.35. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является равнобокая трапеция $ABCD$, основания которой BC и AD соответственно равны 11 см и 21 см, а боковая сторона — 13 см. Площадь диагонального сечения призмы равна 180 см^2. Найдите:

1) площадь боковой поверхности призмы;

2) площадь сечения призмы, проходящего через рёбра AD и B_1C_1.

16.36. Диагональ боковой грани правильной шестиугольной призмы равна 10 см, а площадь боковой поверхности — 288 см^2. Найдите сторону основания и высоту призмы.

16.37. Плоскости граней AA_1B_1B и AA_1C_1C наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярны, $AA_1 = 9$ см. Расстояние между прямыми AA_1 и BB_1 равно 8 см, а между прямыми AA_1 и CC_1 — 15 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

16.38. Двугранный угол при одном из боковых рёбер наклонной треугольной призмы равен 120°. Расстояние от данного ребра до одного из остальных боковых рёбер равно 16 см, а до другого — 14 см. Найдите боковое ребро призмы, если площадь её боковой поверхности равна 840 см^2.

16.39. Высота правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6 см. Точки D и E — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость, которая проходит через прямые AB и DE, образует угол 60° с плоскостью ABC. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

16.40. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна $4\sqrt{2}$ см, а высота призмы — 6 см. Через диагональ основания проведено сечение призмы, параллельное диагонали призмы. Найдите площадь сечения.

16.41. Высота правильной четырёхугольной призмы равна h. В двух соседних боковых гранях проведены две диагонали, имеющие общий конец. Найдите площадь сечения, проходящего через данные диагонали, если угол между ними равен α.

16.42. Высота правильной треугольной призмы равна h. Угол между диагоналями двух боковых граней, имеющими общий конец, равен α. Найдите площадь сечения, проходящего через данные диагонали.

16.43. Каждое ребро наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Ребро AA_1 образует с каждым из рёбер AB и AC угол, равный 45°.

1) Докажите, что $AA_1 \perp BC$.

2) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

16.44. Каждое ребро наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a, проекцией точки A_1 на плоскость ABC является центр треугольника ABC.

1) Докажите, что грань BB_1C_1C является прямоугольником.

2) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

16.45. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$), боковые грани призмы — квадраты. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Упражнения для повторения

16.46. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках E и F соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BEDF$ — параллелограмм.

16.47. Бóльшая диагональ ромба равна d, а его острый угол равен α. Найдите: 1) сторону ромба; 2) меньшую диагональ ромба; 3) площадь ромба; 4) радиус окружности, вписанной в ромб.

§ 17. Параллелепипед

Определение

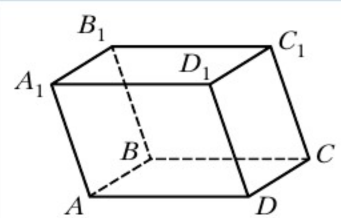
Параллелепипедом называют призму, основания которой являются параллелограммами.

На рисунке 17.1 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Любая грань параллелепипеда является параллелограммом.

Две несоседние грани параллелепипеда называют **противолежащими гранями параллелепипеда**. Например, на рисунке 17.1 грани AA_1B_1B и DD_1C_1C являются противолежащими.

Рис. 17.1



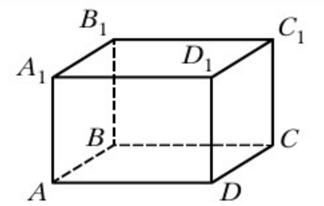
Поскольку $AA_1 \parallel DD_1$ и $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (см. рис. 17.1), то по признаку параллельности плоскостей $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Рассуждая аналогично, можно доказать, что *любые две противолежащие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях*.

Параллелепипед называют **прямым**, если его боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. У прямого параллелепипеда все боковые грани являются прямоугольниками, а основания – параллелограммами.

Прямой параллелепипед называют **прямоугольным**, если его основаниями являются прямоугольники.

На рисунке 17.2 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Рис. 17.2



Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Правильная четырёхугольная призма является частным видом прямоугольного параллелепипеда.

Длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называют **измерениями прямоугольного параллелепипеда**. На рисунке 17.2 длины рёбер AB, AD и AA_1 являются измерениями прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямоугольный параллелепипед называют **кубом**, если его измерения равны. Все грани куба являются квадратами.

Связь между параллелепипедами и их частными видами иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 17.3.

Рис. 17.3

Рассмотрим некоторые свойства параллелепипеда.

Теорема 17.1

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Доказательство

Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.4). В параллелограмме AA_1C_1C проведём диагонали AC_1 и A_1C. Эти отрезки также являются диагоналями данного параллелепипеда. Пусть проведённые диагонали пересекаются в точке O. Эта точка является серединой каждой из диагоналей AC_1 и A_1C.

Докажем, что точка O также является серединой каждой из двух других диагоналей BD_1 и B_1D данного параллелепипеда.

Рассмотрим четырёхугольник AB_1C_1D (рис. 17.5). Он является параллелограммом (докажите это самостоятельно) с диагоналями AC_1 и B_1D. Тогда точка O является серединой отрезка B_1D.

Рассмотрев диагональное сечение BB_1D_1D, аналогично можно доказать, что точка O является серединой диагонали BD_1. ◄

Следствие

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 17.2

Квадрат любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений.

Доказательство

Рассмотрим диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.6). Докажем, что $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Рис. 17.4

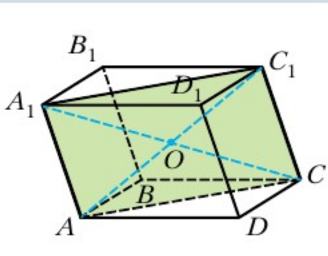


Рис. 17.5

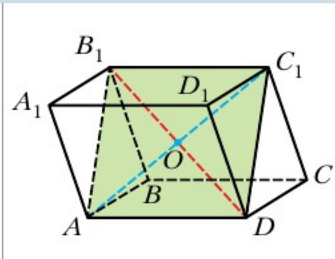
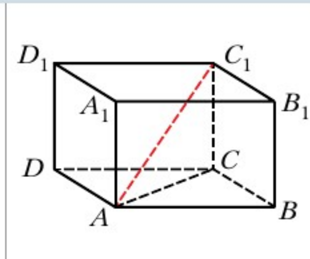


Рис. 17.6



Поскольку треугольник ABC прямоугольный ($\angle ABC = 90°$), то можно записать: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Так как $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

Данный параллелепипед является прямоугольным, поэтому $C_1C \perp ABC$. Следовательно, треугольник ACC_1 прямоугольный ($\angle ACC_1 = 90°$). Тогда $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Поскольку $CC_1 = AA_1$, то $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$. Учитывая равенство (1), можно записать: $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Для остальных трёх диагоналей доказательства аналогичные. ◄

1. Что называют параллелепипедом?
2. Какие грани параллелепипеда называют противолежащими?
3. Какой параллелепипед называют прямым?
4. Какой параллелепипед называют прямоугольным?
5. Что называют измерениями прямоугольного параллелепипеда?
6. Каким свойством обладают диагонали параллелепипеда?
7. Сформулируйте теорему о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда.

Упражнения

17.1. Можно ли считать верным такое определение куба: «Кубом называют правильную четырёхугольную призму, высота которой равна стороне основания»?

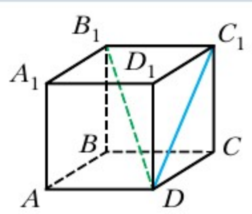
17.2. Докажите, что в прямом параллелепипеде плоскость диагонального сечения перпендикулярна плоскости основания.

17.3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту параллелепипеда.

17.4. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 7 см и 24 см, а высота — 4 см. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда.

17.5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.7), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Найдите угол между:
1) прямой DC_1 и плоскостью BCC_1;
2) прямой B_1D и плоскостью ABB_1.

Рис. 17.7



17.6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.7), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Найдите угол между:
1) прямой DC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$;
2) прямой B_1D и плоскостью ABC.

17.7. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 3 см и 6 см.

17.8. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда, если они относятся как $1 : 2 : 2$, а диагональ параллелепипеда равна 6 см.

17.9. Ребро куба равно a. Чему равна диагональ куба?

17.10. Площадь поверхности куба равна 216 см^2. Найдите площадь его диагонального сечения.

17.11. Из четырёх равных кубов, ребро которых равно 1 см, составили прямоугольный параллелепипед. Чему равна площадь полной поверхности этого параллелепипеда?

17.12. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом α и меньшей диагональю d. Бóльшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.13. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной 6 см и углом $60°$. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали его основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.14. Стороны основания прямого параллелепипеда равны $2\sqrt{2}$ см и 4 см, а один из углов основания равен $45°$. Бóльшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.15. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 2 см и $2\sqrt{3}$ см, а один из углов основания равен $30°$. Площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через меньшую диагональ основания, равна 8 см^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

17.16. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 11 см, 19 см и 20 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

17.17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда больше его измерений соответственно на 9 см, на 8 см и на 5 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

17.18. Докажите, что если диагонали прямого параллелепипеда равны, то данный параллелепипед является прямоугольным.

17.19. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ со стороной 6 см, $\angle BAD = 45°$. Через прямую AD и вершину B_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $60°$. Найдите:

1) боковое ребро параллелепипеда;
2) площадь сечения параллелепипеда плоскостью AB_1D.

17.20. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 30°$. Угол между плоскостями ABC и A_1CD равен $45°$. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

17.21. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней – угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.22. Одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равна a. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с данной стороной основания – угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.23. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, а площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

17.24. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна S. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

17.25. Через диагональ BD основания $ABCD$ и вершину C_1 прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая угол 30° с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 60^\circ$.

17.26. Основание $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин основания $ABCD$. Найдите высоту параллелепипеда, если сторона основания равна 8 см, а боковое ребро параллелепипеда – 6 см.

17.27. Основание $ABCD$ наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом, а плоскости граней AA_1B_1B и CC_1D_1D перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь грани AA_1D_1D, если каждое ребро параллелепипеда равно 8 см.

Упражнения для повторения

17.28. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC = 30^\circ$, отрезок AD – биссектриса треугольника ABC. Найдите отрезок AD.

17.29. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а боковая сторона – 30 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

§ 18. Пирамида

Определение

Многогранник, одна грань которого — *n*-угольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину, называют *n*-угольной пирамидой (рис. 18.1).

Напомним, что треугольники, имеющие общую вершину, называют боковыми гранями пирамиды, а саму общую вершину – вершиной пирамиды; n-угольник, о котором говорится в определении, называют основанием пирамиды; его стороны – рёбрами основания пирамиды; рёбра, не принадлежащие основанию, называют боковыми рёбрами пирамиды (рис. 18.1).

Рис. 18.1

Высотой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 18.2).

Рассмотрим выпуклую n-угольную пирамиду ($n > 3$). Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, пересекает плоскость основания пирамиды по диагонали (рис. 18.3). Такое сечение называют **диагональным сечением пирамиды**.

Рис. 18.2

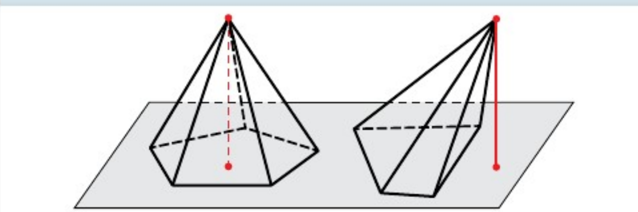
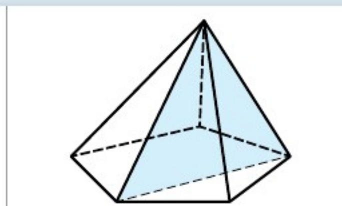


Рис. 18.3



Диагональным сечением пирамиды является треугольник.

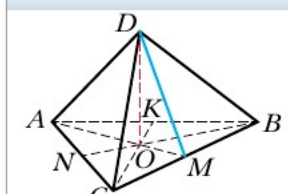
Определение

Пирамиду называют правильной, если её основание — правильный многоугольник и основание высоты пирамиды является центром этого многоугольника.

На рисунке 18.4 изображена правильная треугольная пирамида $DABC$ с основанием ABC. Треугольник ABC является равносторонним. Проекцией вершины D на плоскость ABC является центр этого треугольника – точка O.

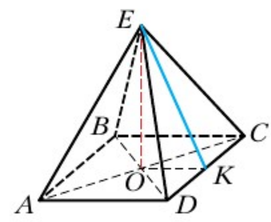
Чтобы найти изображение точки O, надо построить точку пересечения медиан AM, BN и CK треугольника ABC.

Рис. 18.4



На рисунке 18.5 изображена правильная четырёхугольная пирамида $EABCD$. Четырёхугольник $ABCD$ является квадратом, точка O – его центр, отрезок EO – высота пирамиды. Поскольку центр квадрата совпадает с точкой пересечения его диагоналей, то можно сделать такой вывод: проекцией вершины правильной четырёхугольной пирамиды на плоскость основания является точка пересечения диагоналей квадрата, являющегося основанием пирамиды.

Рис. 18.5



Правильную треугольную пирамиду, у которой все рёбра равны, называют **правильным тетраэдром**.

Отметим некоторые свойства правильной пирамиды.

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники (докажите это самостоятельно).

Апофемой правильной пирамиды называют высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.

На рисунке 18.4 проведён отрезок DM, где M – середина ребра BC. Поскольку треугольник BCD – равнобедренный с основанием BC, то отрезок DM – его высота. Следовательно, отрезок DM – апофема правильной треугольной пирамиды $DABC$.

На рисунке 18.5 отрезок EK, где точка K – середина ребра DC, является апофемой правильной четырёхугольной пирамиды $EABCD$.

Все апофемы правильной пирамиды равны (докажите это самостоятельно).

Площадью боковой поверхности пирамиды называют сумму площадей всех её боковых граней.

Очевидно, что выполняется следующее равенство:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{полн}}$ – площадь поверхности пирамиды (ещё говорят: площадь полной поверхности пирамиды), $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания пирамиды.

Теорема 18.1

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания и апофемы.

Доказательство

Рассмотрим правильную n-угольную пирамиду с ребром основания, равным a, и апофемой, равной d. Тогда площадь боковой грани равна $\frac{1}{2}ad$. Поскольку все n боковых граней правильной n-угольной пирамиды – равные треугольники, то площадь боковой поверхности равна $\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, т. е. $S_{\text{бок}} = \left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n = \frac{1}{2}(an)\cdot d$. Так как произведение an равно периметру основания, то теорема доказана. ◄

Результат теоремы 18.1 удобно представить в виде формулы:

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}}\cdot d}$$

где $P_{\text{осн}}$ – периметр основания пирамиды, d – длина апофемы правильной пирамиды.

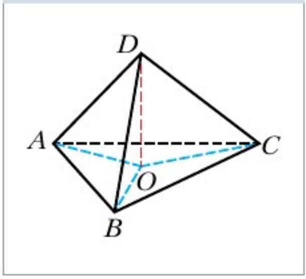
Из ключевой задачи 1 параграфа 10 и ключевой задачи параграфа 12 следует такое свойство: *если боковые рёбра пирамиды равны или образуют равные углы с плоскостью основания, то проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр описанной окружности многоугольника, служащего основанием пирамиды.*

Задача. Докажите, что если все двугранные углы выпуклой пирамиды при рёбрах основания равны α, то: 1) проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной окружности многоугольника, служащего основанием пирамиды; 2) площадь боковой поверхности пирамиды вычисляют по формуле $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$.

Решение. 1) Воспользовавшись ключевой задачей параграфа 11, решите эту задачу самостоятельно.

2) Доказательство проведём для треугольной пирамиды. Для других n-угольных пирамид доказательство будет аналогичным.

Рис. 18.6



На рисунке 18.6 отрезок DO – высота пирамиды $DABC$. Треугольники AOB, BOC и COA являются соответственно ортогональными проекциями треугольников ADB, BDC и CDA на плоскость основания пирамиды.

Воспользовавшись теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника, можно записать: $S_{AOB} = S_{ADB}\cos\alpha$, $S_{BOC} = S_{BDC}\cos\alpha$ и $S_{COA} = S_{CDA}\cos\alpha$. Сложив почленно левые и правые части записанных равенств, получим: $S_{осн} = S_{бок}\cos\alpha$. Отсюда $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. ◄

1. Что называют пирамидой?
2. Что называют высотой пирамиды?
3. Какое сечение называют диагональным сечением пирамиды?
4. Какую пирамиду называют правильной?
5. Что называют апофемой правильной пирамиды?
6. Что называют площадью боковой поверхности пирамиды?
7. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

Упражнения

18.1. Сколько вершин, граней, рёбер имеет n-угольная пирамида?

18.2. Какое наименьшее количество граней может иметь пирамида?

18.3. Докажите, что количество рёбер любой пирамиды является чётным числом.

18.4. На рисунке 18.7 изображена правильная треугольная пирамида $SABC$. Перерисуйте рисунок в тетрадь и изобразите: 1) высоту пирамиды; 2) угол наклона ребра SA к плоскости основания; 3) линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре BC.

18.5. На рисунке 18.8 изображена правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Перерисуйте рисунок в тетрадь и изобразите: 1) высоту пирамиды; 2) угол наклона ребра SC к плоскости основания; 3) линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре AD.

Рис. 18.7

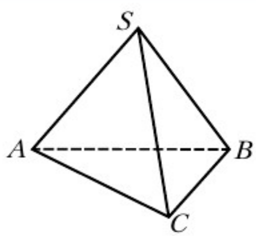
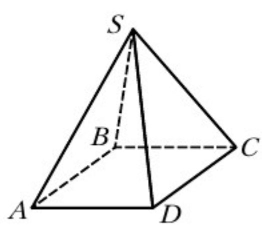


Рис. 18.8



18.6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

18.7. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 8 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите сторону основания пирамиды.

18.8. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6 см, а высота пирамиды – 4 см. Найдите: 1) апофему пирамиды; 2) двугранный угол пирамиды при ребре основания.

18.9. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 2 см, а сторона основания – 6 см. Найдите: 1) высоту пирамиды; 2) двугранный угол пирамиды при ребре основания.

18.10. Сторона основания правильной семиугольной пирамиды равна 10 см, а её апофема – 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.11. Плоский угол при вершине правильной восьмиугольной пирамиды равен 30°, а боковое ребро – 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.12. Площадь боковой поверхности правильной пятиугольной пирамиды равна 300 см^2, а её апофема – 15 см. Найдите сторону основания пирамиды.

18.13. Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 10 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

18.14. Каждое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

18.15. Основанием пирамиды $MABCD$ является параллелограмм $ABCD$, диагональ BD которого равна 4 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а боковое ребро MA равно 8 см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро MD.

18.16. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей – 24 см. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Найдите боковые рёбра пирамиды, если её высота равна 16 см.

18.17. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды, проходящего через бóльшую диагональ основания.

18.18. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

18.19. Докажите, что в правильной пирамиде:

1) боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания;
2) двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны.

18.20. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Найдите двугранный угол пирамиды при ребре основания.

18.21. Двугранный угол правильной четырёхугольной пирамиды при ребре основания равен α. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания.

18.22. Точки D, E и F – середины рёбер AB, AM и MC правильной пирамиды $MABC$ соответственно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см.

1) Постройте сечение пирамиды, проходящее через точки D, E и F.

2) Докажите, что построенное сечение является прямоугольником.

3) Найдите площадь сечения.

18.23. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через основание её высоты и параллельной скрещивающимся рёбрам пирамиды. Найдите периметр этого сечения, если сторона основания пирамиды равна 9 см, а боковое ребро равно 12 см.

18.24. Угол между двумя апофемами правильной треугольной пирамиды равен 60°. Докажите, что боковые грани пирамиды являются равнобедренными прямоугольными треугольниками.

18.25. Каждое ребро правильной пирамиды $MABCD$ равно a, точка E – середина ребра MC.

1) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BED.

2) Найдите угол между плоскостью BED и плоскостью основания пирамиды.

18.26. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

18.27. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна d, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

18.28. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 6 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.29. Высота правильной треугольной пирамиды равна 5 см, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.30. Какого вида параллелограмм может быть основанием пирамиды, у которой боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания?

18.31. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 32 см. Высота пирамиды равна 12 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если они образуют равные углы с плоскостью основания.

18.32. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

18.33. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, такой, что $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC$. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45° и равно 8 см. Найдите площадь основания пирамиды.

18.34. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна $3\sqrt{10}$ см, а основание – 6 см. Высота пирамиды равна 5 см, а её боковые рёбра равны. Найдите боковое ребро пирамиды.

18.35. Какого вида параллелограмм может быть основанием пирамиды, у которой двугранные углы при рёбрах основания равны?

18.36. Основанием пирамиды является ромб со стороной 8 см и углом 30°. Каждый двугранный угол пирамиды при рёбрах основания равен 45°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) высоту пирамиды.

18.37. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 5 см, 12 см и 13 см, а все двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 30°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) высоту пирамиды.

18.38. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, основания которой равны 4 см и 16 см, а все двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 60°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) высоту пирамиды.

18.39. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4 см и 12 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны плоскости основания, плоскость ещё одной грани, проходящей через бóльшую сторону основания, образует угол 45° с плоскостью основания. Найдите:

1) высоту пирамиды;
2) площадь боковой поверхности пирамиды.

18.40. Основанием пирамиды является квадрат со стороной 12 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если её высота равна 5 см.

18.41. Плоскости боковых граней ABM и CBM пирамиды $MABC$ перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, $MB = 20$ см.

18.42. Плоскости боковых граней MAB и MAC пирамиды $MABC$ перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь грани MBC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $MA = 9$ см.

◇

18.43. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите двугранный угол пирамиды при боковом ребре.

18.44. Двугранный угол правильной четырёхугольной пирамиды при боковом ребре равен α. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

18.45. Расстояние от центра основания правильной треугольной пирамиды до плоскости её боковой грани равно d, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.46. Расстояние от центра основания правильной четырёхугольной пирамиды до плоскости боковой грани равно m, а угол между высотой пирамиды и плоскостью боковой грани равен β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.47. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ равна 8 см, а высота пирамиды — 12 см.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер MA и MD параллельно высоте пирамиды.

2) Найдите площадь сечения.

18.48. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен 60°.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

2) Найдите площадь сечения.

18.49. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, основания которой равны 2 см и 18 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны, а высота одной из боковых граней, проведённая к ребру основания пирамиды, — 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.50. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 15 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны, а высота пирамиды равна $3\sqrt{15}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.51. Основанием пирамиды $MABC$ является треугольник ABC, такой, что $AB = BC = 2$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Плоскости боковых граней MAB и MAC перпендикулярны плоскости основания, а угол между плоскостью MBC и плоскостью основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.52. Основанием пирамиды $MABCD$ является ромб со стороной a. Плоскости боковых граней ABM и CBM перпендикулярны плоскости основания, а двугранный угол при ребре MB является тупым и равен α. Угол между плоскостью AMD и плоскостью основания равен β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

18.53. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 6 см. Плоскость одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а плоскости двух других граней образуют с плоскостью основания угол 45°. Найдите высоту пирамиды.

18.54. Основанием пирамиды $MABC$ является треугольник ABC, такой, что $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Плоскость грани BMC перпендикулярна плоскости основания, а плоскости двух других граней наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите ребро MC.

18.55. Каждое ребро тетраэдра равно 1 см. Найдите наибольшее значение площади сечения данного тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся рёбрам.

18.56. Существует ли четырёхугольная пирамида, две несоседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания?

18.57. На сторонах BA и BC равностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки C_1 и A_1. Докажите, что отрезки AA_1, CC_1 и A_1C_1 могут служить сторонами некоторого треугольника.

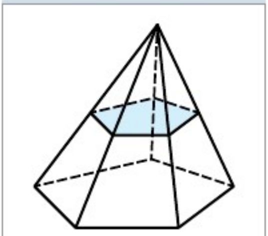
Упражнения для повторения

18.58. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников BOC и AOD, если $BC = 3$ см, $AD = 9$ см.

18.59. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 25$ см, $AC = 14$ см. К окружности, вписанной в данный треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC и пересекающая стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника MBK.

§ 19. Усечённая пирамида

Рис. 19.1



Пересечём произвольную пирамиду плоскостью, параллельной основанию пирамиды (рис. 19.1). Эта плоскость разбивает данную пирамиду на два многогранника: один многогранник является пирамидой, другой называют **усечённой пирамидой**.

В усечённой пирамиде (рис. 19.2) две грани – n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях. Их называют **основаниями усечённой пирамиды**. Остальные n граней усечённой пирамиды – трапеции. Их называют **боковыми гранями усечённой пирамиды**. Стороны оснований называют **рёбрами оснований усечённой пирамиды**. Рёбра, не принадлежащие основаниям, называют **боковыми рёбрами усечённой пирамиды**.

Заметим, что основания усечённой пирамиды являются подобными фигурами. Этот факт будет доказан в курсе геометрии 11 класса.

Высотой усечённой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки плоскости одного основания на плоскость другого основания. Длина высоты усечённой пирамиды равна расстоянию между плоскостями её оснований.

Если правильную n-угольную пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то образовавшуюся усечённую пирамиду называют **правильной *n*-угольной усечённой пирамидой**.

Основаниями правильной усечённой n-угольной пирамиды являются правильные n-угольники, а боковыми гранями – равнобокие трапеции.

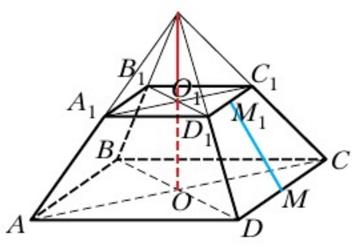
Апофемой правильной усечённой пирамиды называют отрезок, соединяющий середины рёбер оснований, принадлежащих одной боковой грани.

Все апофемы правильной усечённой пирамиды равны (докажите это самостоятельно).

На рисунке 19.3 изображена правильная четырёхугольная усечённая пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основаниями являются квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки O и O_1 – их центры. Отрезок OO_1 – высота усечённой пирамиды.

Рис. 19.2

Рис. 19.3



Соединим середины M и M_1 рёбер CD и C_1D_1 соответственно. Отрезок MM_1 – апофема правильной четырёхугольной усечённой пирамиды. Поскольку четырёхугольник CC_1D_1D – равнобокая трапеция, то отрезок MM_1 – её высота.

Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды называют сумму площадей всех её боковых граней.

Теорема 19.1

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров её оснований и апофемы.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Результат теоремы 19.1 удобно представить в виде формулы:

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_{\text{осн}} + p_{\text{осн}})d}$$

где $P_{\text{осн}}$ и $p_{\text{осн}}$ – периметры оснований, d – длина апофемы правильной усечённой пирамиды.

1. Опишите, какой многогранник называют усечённой пирамидой.
2. Опишите элементы усечённой пирамиды.
3. Какую усечённую пирамиду называют правильной?
4. Что называют апофемой правильной усечённой пирамиды?
5. Что называют площадью боковой поверхности усечённой пирамиды?
6. Чему равна площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды?

Упражнения

19.1. Площадь боковой поверхности правильной усечённой шестиугольной пирамиды равна 540 см². Найдите стороны оснований пирамиды, если они относятся как 2 : 3, а апофема равна 9 см.

19.2. Найдите апофему правильной усечённой пятиугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 6 см и 10 см, а площадь боковой поверхности – 280 см².

19.3. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 12 см и 18 см, а двугранный угол пирамиды при ребре большего основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

19.4. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 6 см и 9 см, а двугранный угол пирамиды при ребре большего основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

19.5. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 6 см и 10 см, а высота пирамиды — 4 см. Найдите:

1) диагональ усечённой пирамиды;

2) площадь сечения, проходящего через боковые рёбра, не принадлежащие одной грани;

3) площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

19.6. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 15 см и 27 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найдите:

1) высоту пирамиды;

2) площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

19.7. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 24 см и 30 см, а боковые рёбра — 4 см. Найдите высоту пирамиды.

19.8. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 6 см и 12 см, а площадь боковой поверхности — 54 см^2. Найдите высоту пирамиды.

19.9. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ равны 8 см и 5 см, а высота пирамиды — 3 см. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и точку C_1.

19.10. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 8 см и 6 см, а высота пирамиды — $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC и точку B_1.

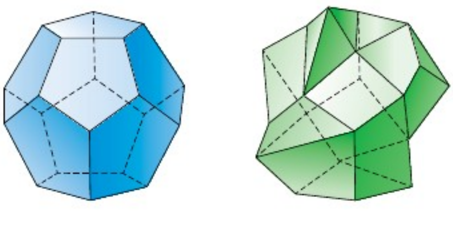
19.11. Боковое ребро BB_1 усечённой пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости основания, $BB_1 = 4$ см, $AB = BC = 16$ см, $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

19.12. Основания усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются квадратами, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см. Грань AA_1B_1B является равнобокой трапецией, а её плоскость перпендикулярна плоскости основания. Угол между плоскостью грани CC_1D_1D и плоскостью основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

де с греческого означает «двенадцатигранник». Многогранник *Б* правильным не является.

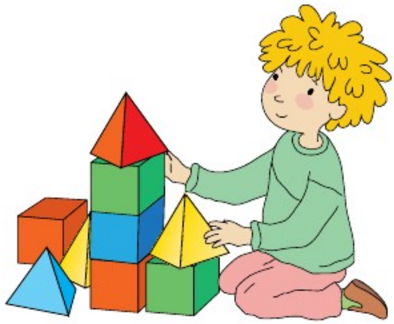
С самого детства каждого из нас окружали правильные многогранники. Кубики и пирамидки – одни из первых наших игрушек (рис. 19.5). Действительно, куб – правильный многогранник, ведь все шесть граней куба – равные квадраты (правильные четырёхугольники) и в каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер (по три ребра). Куб также называют **гексаэдром** (от греческого – *шестигранник*). Треугольная пирамида (**тетраэдр**, от греческого – *четырёхгранник*), все грани которой – правильные треугольники, также является правильным многогранником (подумайте почему).

Рис. 19.4



А *Б*

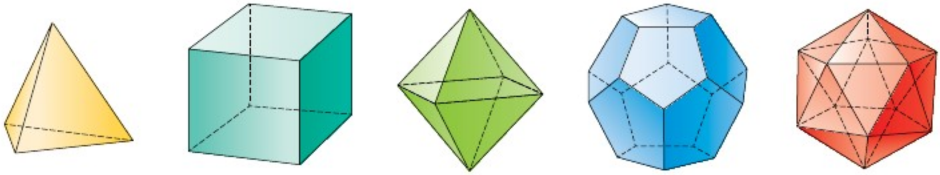
Рис. 19.5



Правильные многогранники в стереометрии являются в некотором роде аналогами правильных многоугольников в планиметрии. Как вы знаете, на плоскости существуют правильные треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Вообще, для каждого натурального значения n ($n \geq 3$) существует правильный n-угольник. С правильными многогранниками дело обстоит иначе.

Помимо правильного тетраэдра, куба и додекаэдра, со времён Древней Греции известны ещё два правильных многогранника: **октаэдр** (от греческого – *восьмигранник*) и **икосаэдр** (от греческого – *двадцатигранник*) (рис. 19.6). Все восемь граней октаэдра являются правильными треугольниками, и в каждой вершине сходится четыре ребра. Октаэдр удобно представлять как объединение двух четырёхугольных пирамид, склеенных своими основаниями. Если боковые грани этих пирамид – равные правильные треугольники, то полученный после склеивания многогранник является октаэдром (рис. 19.7). Гранями икосаэдра являются равные правильные треугольники, и в каждой вершине икосаэдра сходится пять рёбер.

Рис. 19.6



Тетраэдр Гексаэдр Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

Изучение правильных многогранников являлось одной из основных задач геометров Древней Греции. Многие греческие философы того времени считали, что правильные многогранники лежат в основе всего мироздания. Например, Платон считал, что правильные многогранники символизируют природные стихии. Правильные многогранники также иногда называют платоновыми телами.

Геометрам Древней Греции удалось описать все возможные правильные многогранники. Оказалось, что существует только пять правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). Этот факт можно доказать, опираясь на следующее свойство произвольного выпуклого многогранника: сумма всех плоских углов, примыкающих к произвольной вершине многогранника, меньше 360° (рис. 19.8).

Рис. 19.7

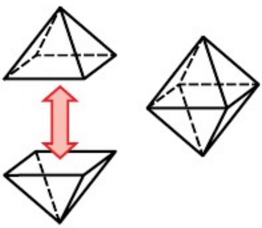
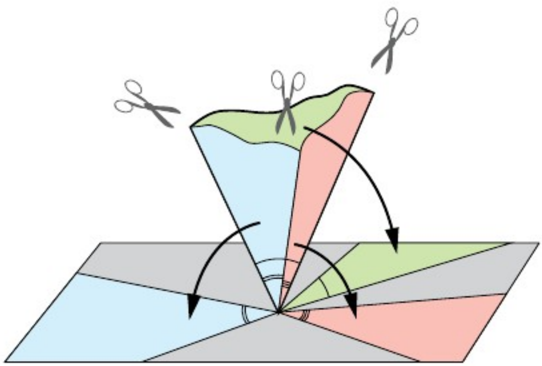


Рис. 19.8



В правильном многограннике каждая грань является правильным n-угольником. Поскольку сумма всех углов n-угольника равна $180^\circ(n-2)$, то каждый плоский угол такого n-угольника равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Если к вершине правильного многогранника примыкает k таких плоских углов, то их сумма равна $k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Поэтому

$$k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} < 360^\circ;$$
$$180^\circ kn - 360^\circ k < 360^\circ n;$$
$$180^\circ n(k-2) < 360^\circ k;$$
$$n < \frac{2k}{k-2}.$$

Последнее неравенство перепишем так:

$$n < 2 + \frac{4}{k-2}. \qquad (1)$$

Поскольку к произвольной вершине многогранника может примыкать не менее трёх плоских углов, то $k \geqslant 3$. Вместе с тем, если $k \geqslant 6$, то из неравенства (1) следует, что $n < 3$. Однако каждая грань многогранника содержит не менее трёх рёбер. Поэтому при $k \geqslant 6$ правильных многогранников не существует. Остаётся рассмотреть такие возможности: $k = 3$, $k = 4$, $k = 5$.

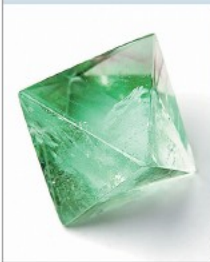
Если $k = 3$, то из неравенства (1) следует, что $n < 6$. Поэтому в этом случае гранями правильного многогранника могут быть или правильные треугольники (как у правильного тетраэдра), или правильные четырёхугольники (как у куба), или правильные пятиугольники (как у додекаэдра).

Если $k = 4$, то из неравенства (1) следует, что $n < 4$. Поэтому в этом случае гранями правильного многогранника могут быть только правильные треугольники (как у октаэдра).

Если $k = 5$, то из неравенства (1) следует, что $n < 3\frac{1}{3}$. Поэтому и в этом случае гранями правильного многогранника могут быть только правильные треугольники (как у икосаэдра).

Объекты, по форме напоминающие правильные многогранники, нередко встречаются в природе. Например, форму куба имеют кристаллы поваренной соли (рис. 19.9) и пирита; кристаллы флюоритов имеют форму октаэдра (рис. 19.10); иногда кристаллы пирита напоминают додекаэдр (рис. 19.11). Биологи обнаружили, что части некоторых вирусов имеют форму икосаэдра. Элементы многих архитектурных объектов сконструированы в виде правильных многогранников (рис. 19.12).

Рис. 19.9

Рис. 19.10	Рис. 19.11	Рис. 19.12
		
Флюорит	Пирит	Смотровая площадка «Тетраэдр», город Боттроп, Германия

Геометрическое тело

В параграфе 16 вы ознакомились с понятием геометрического тела (или просто тела). Напомним, что многогранник, шар, конус являются примерами тел, а, например, плоскость, двугранный угол или фигуры, изображённые на рисунке 16.2, телами не являются. Предлагаем вам глубже ознакомиться с этим непростым понятием.

Опишем свойства, которые выделяют тела среди всех геометрических фигур.

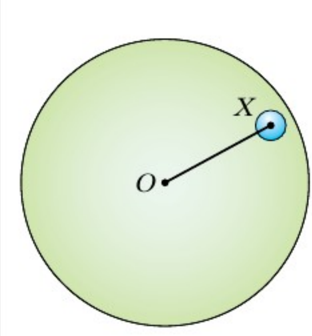
Определение

Фигуру (множество точек пространства) называют открытой, если каждая её точка принадлежит фигуре вместе с некоторым шаром с центром в этой точке.

Примером открытого множества может служить всё пространство.

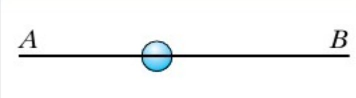
Ещё один пример открытого множества можно получить, рассмотрев «шар без своей сферы», т. е. множество B точек, расстояние от которых до центра O меньше радиуса R. Действительно, выберем в этом множестве B произвольную точку X. Тогда $OX < R$ (рис. 19.13). Если рассмотреть маленький шар радиуса $r = \frac{R - OX}{2}$ с центром в точке X, то он полностью принадлежит данному множеству B. Поэтому B — открытое множество.

Рис. 19.13



Например, прямая AB не является открытым множеством, поскольку шар с центром в любой её точке не принадлежит этой прямой (рис. 19.14). Вообще любая плоская фигура не является открытой.

Рис. 19.14



Определение

Фигуру называют ограниченной, если она полностью содержится в некотором шаре.

Например, отрезок, пирамида, шар — ограниченные фигуры, а прямая, плоскость, двугранный угол — неограниченные фигуры.

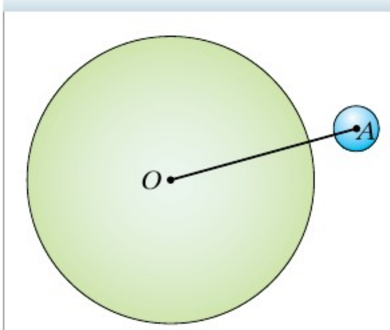
Определение

Точку называют точкой прикосновения фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку этой фигуры.

Например, каждая точка шара является точкой прикосновения этого шара, каждая точка отрезка является точкой прикосновения этого отрезка. Вообще каждая точка фигуры является её точкой прикосновения. Однако не следует думать, что точка прикосновения обязательно принадлежит фигуре. Например, рассмотрим отрезок AB, из которого удалили его концы – точки A и B. Помимо точек, лежащих между A и B, точками прикосновения этой фигуры будут также точки A и B. Действительно, произвольный шар с центром в любой из этих точек будет содержать внутренние точки отрезка AB.

Приведём пример точки, не являющейся точкой прикосновения. Рассмотрим шар с центром в точке O радиуса R и точку A, не принадлежащую данному шару. Это означает, что длина отрезка OA больше радиуса R шара. Тогда точка A не является точкой прикосновения этого шара. Действительно, если рассмотреть ещё один шар с центром в точке A и радиусом $r = \frac{OA - R}{2}$, то этот шар не будет пересекаться с данным шаром (рис. 19.15).

Рис. 19.15



Определение

Фигуру называют связной, если при любом её разбиении на две части хотя бы одна из этих частей содержит точки прикосновения другой части.

Рассмотрим, например, фигуру F на рисунке 16.2. Фигура F – это объединение двух шаров. Ясно, что фигура F не является связной, поскольку её можно разбить на две части (два составляющих её шара), каждая из которых не содержит точек прикосновения другой части. Вместе с тем, прямая, плоскость, конус – примеры связных фигур.

Определение

Поверхностью фигуры Φ называют множество точек, являющихся точками прикосновения как для самой фигуры, так и для фигуры, состоящей из точек пространства, не принадлежащих фигуре Φ.

Например, поверхностью шара является его сфера. Объединение всех граней многогранника является поверхностью многогранника.

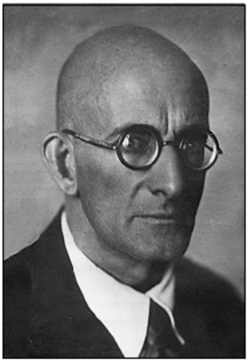
Теперь мы можем дать определение тела.

Определение

Телом называют ограниченную фигуру, являющуюся объединением непустой связной открытой фигуры и её поверхности.

После приведённого определения вы можете сами обосновать, почему прямая, плоскость, двугранный угол, а также фигуры, изображённые на рисунке 16.2, не являются телами.

Понятия открытого множества, точки прикосновения, связности являются одними из фундаментальных в *топологии* – важнейшем разделе современной математики. В становлении и развитии топологии особую роль сыграли российские учёные П.С. Александров и П.С. Урысон. Их считают создателями советской топологической школы, получившей мировое признание.



Александров Павел Сергеевич (1896–1982)

Известный советский математик, академик АН СССР и многих зарубежных академий, президент Московского математического общества, заведующий кафедрой высшей геометрии и топологии в МГУ.

Ещё студентом Павел Сергеевич активно занимался научной работой и уже в 19 лет получил первый важный результат мирового значения. Основные математические интересы относятся к топологии, теории множеств, геометрии и пр.

П.С. Александров был в числе первых организаторов Московской математической олимпиады для школьников.

Урысон Павел Самуилович (1898–1924)

Необычайно талантливый советский математик, к сожалению, рано ушедший из жизни (26 лет).

Основные результаты получены в области топологии. П.С. Урысон один из основателей советской топологической школы, впервые в России прочитавший студентам курс топологии. Среди открытий Павла Самуиловича есть и важная геометрическая теорема о том, что шар является телом максимального объёма при некоторых ограничениях на ширину тела.

Целый ряд понятий и утверждений сегодня носят имя Урысона.

Итоги главы 4

Многогранник

Многогранником называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Многогранник называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Призма

Многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы, называют n-угольной призмой.

Призму называют прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

Призму называют правильной, если она является прямой и её основание — правильный многоугольник.

Площадь боковой поверхности прямой призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра призмы.

Параллелепипед

Параллелепипедом называют призму, основания которой являются параллелограммами.

Параллелепипед называют прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

Прямой параллелепипед называют прямоугольным, если его основаниями являются прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед называют кубом, если его измерения равны.

Свойства параллелепипеда

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Квадрат любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений.

Пирамида

Многогранник, одна грань которого — n-угольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину, называют n-угольной пирамидой.

Пирамиду называют правильной, если её основание — правильный многоугольник и основание высоты пирамиды является центром этого многоугольника. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники.

Апофемой правильной пирамиды называют высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.

Площадь боковой поверхности пирамиды

Площадью боковой поверхности пирамиды называют сумму площадей всех её боковых граней.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания и апофемы.

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров её оснований и апофемы.

§ 20. Упражнения для повторения курса геометрии 10 класса

Введение в стереометрию

20.1. Среди точек A, B, C и D есть три точки, лежащие на одной прямой. Сколько плоскостей можно провести через данные точки?

20.2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M не лежит в плоскости ABC. Можно ли провести плоскость через:
1) прямую AM и точки O и C;
2) прямую AC и точки B и M?

20.3. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 20.1). Точка D принадлежит прямой AB, точка E – прямой AC. Постройте сечение призмы плоскостью A_1DE.

20.4. Точка M принадлежит грани BB_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – ребру AD (рис. 20.2). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABB_1.

20.5. Точка M принадлежит грани AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – грани AA_1D_1D (рис. 20.3). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью $A_1B_1C_1$.

Рис. 20.1

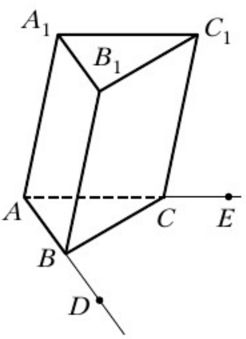


Рис. 20.2

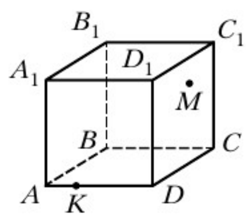
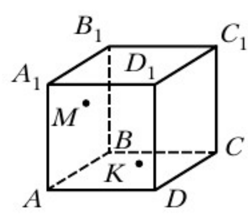


Рис. 20.3



20.6. На рёбрах BB_1, CC_1 и DD_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M, N и K, причём $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ и $CN \neq DK$. Постройте линию пересечения плоскостей ABC и MNK.

20.7. Точка M – середина ребра A_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра CD. Постройте линию пересечения плоскостей AMK и BB_1C_1.

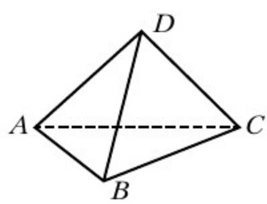
20.8. На рёбрах AB, AD, AC и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F, M и K. Постройте линию пересечения плоскостей EFM и DAK.

20.9. На рёбрах DA и DB тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M и K. Постройте линию пересечения плоскостей ABC и MKC.

Параллельность в пространстве

20.10. Дан тетраэдр $DABC$ (рис. 20.4). Запишите все пары его скрещивающихся рёбер.

Рис. 20.4



20.11. Прямая MK, не лежащая в плоскости параллелограмма $ABCD$, параллельна прямой AD. Каково взаимное расположение прямых: 1) MK и BC; 2) MK и AB?

20.12. Известно, что прямые a и b параллельны, а прямая c не пересекает прямую a и пересекает прямую b. Докажите, что прямые a и c скрещивающиеся.

20.13. Каждая из прямых c и d пересекает каждую из параллельных прямых a и b. Докажите, что прямые c и d не являются скрещивающимися.

20.14. Отрезки AB и CD – диаметры одной окружности. Плоскость α не имеет общих точек с данной окружностью. Через точки A, B, C и D провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 9$ см, $DD_1 = 3$ см.

20.15. Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $AB \parallel CMD$.

20.16. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, можно провести прямую, параллельную этой плоскости. Сколько таких прямых можно провести?

20.17. Сколько плоскостей, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку?

20.18. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Точка M – середина отрезка AC, точка N – середина отрезка BC. На отрезке AD отмечена точка K, а на отрезке BD – точка E так, что $KE \parallel ABC$. Докажите, что $KE \parallel MN$.

20.19. Дано: $\alpha \cap \beta = c$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $A \notin c$, $B \notin c$. Проведите через точки A и B плоскость, параллельную прямой c.

20.20. На рёбрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F и M так, что $\angle ABE = \angle FEB$, $\angle CBM = \angle FMB$. Докажите, что плоскости ABC и EFM параллельны.

20.21. Известно, что $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Прямая a пересекает плоскость α в точке A, плоскость β – в точке B, а прямая b пересекает плоскость β в точке C (рис. 20.5). Постройте точку пересечения прямой b и плоскости α.

20.22. Даны параллельные плоскости α и β и пересекающиеся прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α в точке M, плоскость β – в точке N, а прямая b пересекает плоскость α в точке K (рис. 20.6). Постройте точку пересечения прямой b и плоскости β.

Рис. 20.5

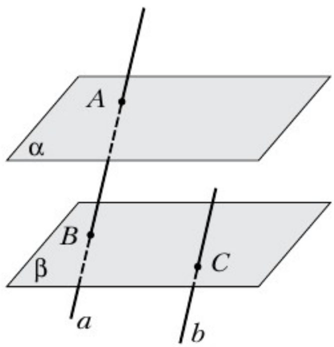
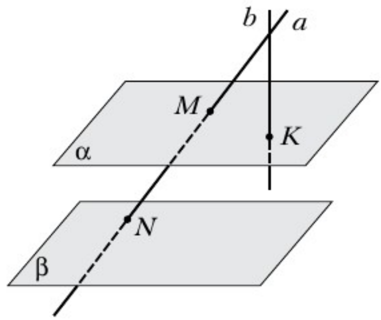


Рис. 20.6



20.23. На ребре AC призмы $ABCA_1B_1C_1$ отметили точку D (рис. 20.7). Постройте сечение призмы плоскостью BDB_1.

Рис. 20.7

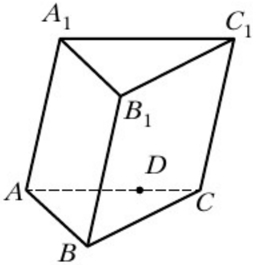


Рис. 20.8

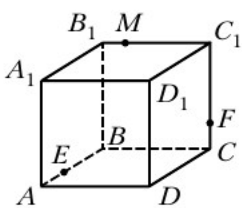
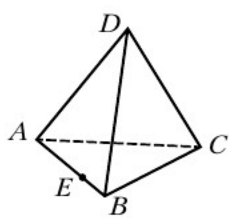


Рис. 20.9



20.24. Медианы грани ADB тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке E, а медианы грани BDC – в точке F. Докажите, что прямая EF параллельна плоскости ABC.

20.25. На рёбрах AB, CC_1 и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки E, F и M (рис. 20.8). Постройте сечение куба плоскостью EFM.

20.26. На ребре AB тетраэдра $DABC$ отметили точку E (рис. 20.9). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости BCD.

20.27. На ребре DA тетраэдра $DABC$ отметили точку M так, что $AM : MD = 4 : 3$ (рис. 20.10). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости ABC. Вычислите площадь полученного сечения, если $AB = BC = AC = 28$ см.

20.28. Основанием пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Точка K – середина ребра AD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K параллельно плоскости ABM. Найдите периметр полученного сечения, если $MA = MB = 16$ см, $AB = 10$ см.

20.29. Верно ли утверждение:

1) если параллельные проекции двух прямых на плоскость параллельны, то данные прямые параллельны;

2) если плоская фигура равна своей параллельной проекции, то плоскость, в которой лежит данная фигура, и плоскость, в которой лежит её проекция, параллельны?

20.30. Точки A_1, B_1 и C_1 являются соответственно изображениями вершин A, B и C параллелограмма $ABCD$ (рис. 20.11). Постройте изображение параллелограмма $ABCD$.

Рис. 20.10

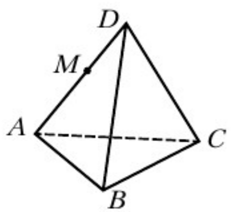
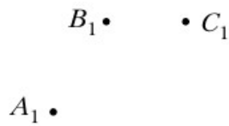


Рис. 20.11



20.31. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB, отрезок A_1B_1 – изображение гипотенузы AB. Постройте изображение квадрата, вписанного в треугольник ABC и имеющего с ним общий угол, если: 1) $AC = BC$; 2) $AC : BC = 2 : 3$.

20.32. Прямая m параллельна стороне AC треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC, $\angle ABC = \angle BAC = 30^\circ$.

1) Докажите, что прямые m и BC скрещивающиеся.

2) Найдите угол между прямыми m и BC.

20.33. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом, а ребро AA_1 вдвое больше ребра AB. Найдите угол между прямыми: 1) AB_1 и CD; 2) AB_1 и CD_1; 3) AB_1 и A_1C_1.

20.34. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 20.12). Точка M – середина отрезка AC. Найдите отрезки DA и DM, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $DB = 24$ см.

20.35. Могут ли быть перпендикулярны одной плоскости две стороны: 1) треугольника; 2) параллелограмма; 3) правильного шестиугольника?

20.36. Точка M, расположенная вне плоскости ромба $ABCD$, такова, что $\angle ABM = \angle CBM = 90^\circ$. Найдите отрезок MD, если $AD = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle MDB = \beta$.

20.37. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая MO, перпендикулярная плоскости квадрата. Точка K – середина отрезка CD, $MC = 6$ см, $\angle MCK = 60^\circ$.

1) Докажите, что прямая CD перпендикулярна плоскости MOK.

2) Найдите отрезок MO.

20.38. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке AC отметили точку M так, что $AM : MC = 1 : 2$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AC.

20.39. Отрезок AB не пересекает плоскость α, а прямая AB пересекает плоскость α в точке C. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок B_1C, если $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 4$ см.

20.40. Отрезок AB пересекает плоскость α. Через точки A и B и середину C отрезка AB проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 18$ см, $BB_1 = 9$ см.

20.41. При симметрии относительно плоскости α образом плоскости β является плоскость β_1. Докажите, что если $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$.

20.42. Из точки M проведены к плоскости α перпендикуляр MH и равные наклонные MA и MB (рис. 20.13). Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $\angle MAH = 30^\circ$, $\angle AMB = 60^\circ$, $MH = 5$ см.

20.43. Угол между диагональю прямоугольника $ABCD$ и одной из его сторон равен 30°. Точка M удалена от каждой вершины прямоугольника на $5\sqrt{3}$ см, а от его плоскости – на $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

20.44. Докажите, что если отрезок не пересекает плоскость, то расстояние от середины данного отрезка до данной плоскости равно полусумме расстояний от концов отрезка до этой плоскости.

20.45. Докажите, что если отрезок пересекает плоскость, то расстояние от середины данного отрезка до данной плоскости равно полуразности расстояний от концов отрезка до этой плоскости.

20.46. Отрезок MC – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 6$ см. Расстояние от точки M до прямой AB равно $3\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

20.47. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$, $AB = 5$ см, $BC = 16$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой AD, если расстояние от точки M до прямой CD равно 20 см.

20.48. Отрезок KC – перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$, $AB = 15$ см, $AD = 20$ см, $KC = 5$ см. Найдите расстояние от точки K до прямой BD.

20.49. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами 6 см, 25 см и 29 см, проведён перпендикуляр DO к плоскости ABC. Расстояние от точки D до плоскости ABC равно $2\sqrt{15}$ см. Найдите расстояние от точки D до сторон треугольника.

20.50. Прямая MB перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 20.14), сторона которого равна 4 см. Угол между прямой MA и плоскостью ABC равен 45°. Найдите угол между прямой MD и плоскостью ABC.

Рис. 20.12

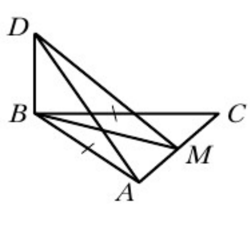


Рис. 20.13

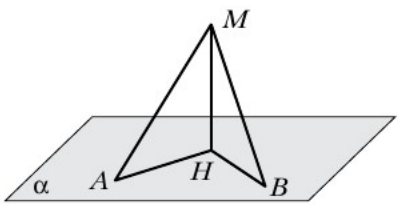
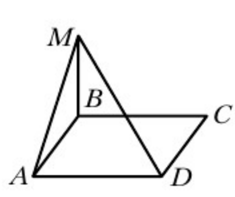


Рис. 20.14



20.51. Точка M, равноудалённая от вершин правильного треугольника ABC, находится на расстоянии 5 см от его плоскости. Найдите площадь треугольника ABC, если угол между прямой MA и плоскостью ABC равен 60°.

20.63. Точки A и B принадлежат разным граням острого двугранного угла, а точки C и D – его ребру, причём $AC = AD$, $BC = BD$ (рис. 20.16). Прямая m перпендикулярна ребру двугранного угла и пересекает грань угла, которой принадлежит точка A, в точке E. Постройте точку пересечения прямой m с другой гранью данного двугранного угла.

20.64. Грани двугранного угла лежат в плоскостях α и β (рис. 20.17). Прямая m пересекает грань, лежащую в плоскости α, в точке A, а другую грань – в точке B. Прямая n параллельна прямой m и пересекает грань, лежащую в плоскости α, в точке C. Постройте точку пересечения прямой n с другой гранью данного двугранного угла.

Рис. 20.16

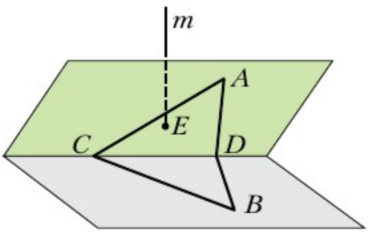
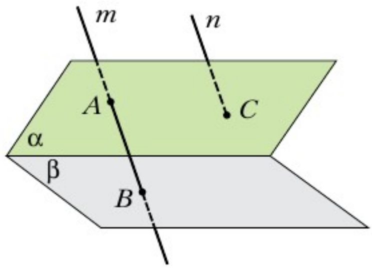


Рис. 20.17



20.65. Прямая c – линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. Точка M удалена от плоскости α на 9 см, а от плоскости β – на 12 см. Найдите расстояние между точкой M и прямой c.

20.66. Прямая c – линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. В плоскости α провели прямую a, а в плоскости β – прямую b так, что $a \parallel c$, $b \parallel c$. Расстояние между прямыми a и c на 1 см меньше расстояния между прямыми a и b, а расстояние между прямыми b и c на 32 см меньше расстояния между прямыми a и b. Найдите расстояние между прямыми a и b.

20.67. Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$. Докажите, что $a \perp c$, $b \perp c$, $a \perp b$.

20.68. Докажите, что если каждая из двух плоскостей перпендикулярна третьей плоскости и линии пересечения данных плоскостей с третьей плоскостью параллельны, то эти плоскости параллельны.

20.69. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая m, перпендикулярная плоскости ABC. На прямой m отметили точку D, такую, что угол между плоскостями ABC и ABD равен 30°. Найдите площадь треугольника ABD, если $AB = 16$ см, $\angle BAC = 45°$.

20.70. Проекцией трапеции, площадь которой равна $40\sqrt{2}$ см^2, является равнобокая трапеция с основаниями 7 см и 13 см и боковой стороной 5 см. Найдите угол между плоскостями данных трапеций.

Многогранники

20.71. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 25 см, а диагональ боковой грани — 20 см. Найдите высоту призмы.

20.72. Стороны основания прямой треугольной призмы относятся как 15 : 10 : 9. Найдите стороны основания, если площадь боковой поверхности призмы равна 816 см^2, а боковое ребро призмы — 12 см.

20.73. Сечением наклонной четырёхугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является равнобокая трапеция, в которую можно вписать окружность, а основания этой трапеции равны 5 см и 7 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если её боковое ребро равно 8 см.

20.74. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12 см, $AC = BC$, $AB = 8$ см, диагональ грани BB_1C_1C равна 13 см. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через прямую AB и точку C_1.

20.75. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна a, наибольшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

20.76. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Угол между плоскостями ABC и A_1BC равен β. Найдите высоту призмы, если $BC = a$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$.

20.77. Угол между диагональю боковой грани правильной треугольной призмы и соседней боковой гранью равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если её боковое ребро равно 8 см.

20.78. Площадь поверхности куба равна 216 см^2. Найдите площадь его диагонального сечения.

20.79. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка K — центр грани ABB_1A_1. Найдите угол между прямой MK и плоскостью ABC.

20.80. Точки E, F и M — середины рёбер AD, CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Найдите угол между плоскостями ABC и EFM.

20.81. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 9 см и 8 см, а угол между ними равен 60°. Бо́льшая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

20.82. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

20.83. Боковое ребро наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6 см, а площадь боковой поверхности — 312 см^2. Расстояние между рёбрами AA_1 и BB_1 равно 5 см, а между рёбрами BB_1 и DD_1 — 19 см. Найдите двугранные углы при рёбрах AA_1 и BB_1.

20.84. Диагональным сечением правильной четырёхугольной пирамиды является прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Найдите площадь основания пирамиды.

20.85. Боковое ребро правильной пирамиды $MABCD$ равно стороне основания.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB и параллельной плоскости AMD.

2) Найдите отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

20.86. Основанием пирамиды является прямоугольник, одна из сторон которого равна a. Угол между этой стороной и диагональю прямоугольника равен α. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Найдите высоту пирамиды.

20.87. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, большее основание которой равно 15 см, боковая сторона — 10 см. Двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

20.88. Основанием пирамиды является ромб, диагонали которого равны 40 см и 30 см, а высота пирамиды равна 5 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если двугранные углы при рёбрах её основания равны.

20.89. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Плоскости ABD и ACD перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB = 26$ см, $BC = 10$ см, $AD = 18$ см.

20.90. Основанием пирамиды является квадрат, а одно из боковых рёбер равно стороне этого квадрата и перпендикулярно плоскости основания. Найдите двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания.

20.91. Ромб $ABCD$ является основанием пирамиды $MABCD$, $AB = 10$ см, $\angle BAD = 60°$. Плоскости ABM и ADM перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а плоскости BCM и DCM образуют с плоскостью основания углы по 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Дружим с компьютером

В предыдущих классах вы уже использовали компьютер при изучении геометрии, создавали рисунки объектов, изучаемых в планиметрии.

При изучении курса стереометрии вы будете создавать рисунки объектов, изучаемых в стереометрии. Эти рисунки намного сложнее планиметрических. Существует ряд специализированных пакетов программ, предназначенных для инженерного черчения, и в том числе для изображения объёмных объектов (например, *AutoCad*). Такие программы довольно сложны, но если вы выберете профессию, требующую умения чертить и читать чертежи, – инженера, наладчика, квалифицированного рабочего, то вам будет полезно приобрести навыки работы с такими программами.

Задания курса стереометрии 10 класса для выполнения с помощью компьютера

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Часть этих заданий – продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения в тексте учебника помечены значком «»); в этом разделе указан номер соответствующего задания.

Для тех, кто любит программирование и изучает факультативный курс, предлагаем создавать алгоритмы и программы, в которых будут использоваться полученные математические знания.

К § 1 «Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии»

Освойте инструментарий графического редактора, с помощью которого можно изображать плоскости.

Обратите внимание на рисунки 1.7 и 1.8. «Невидимые» части фигур изображены пунктирной линией.

1.1–1.4. Постройте требуемые изображения с помощью графического редактора.

К § 2 «Следствия из аксиом стереометрии»

Вы знаете, что прямую можно задать двумя различными точками, принадлежащими ей. Предположим, что существует набор таких подпрограмм:

1) по данным точке и прямой определить, принадлежит ли точка прямой;

2) по данным точке и плоскости определить, принадлежит ли точка плоскости;

3) для данной прямой получить произвольную точку, принадлежащую этой прямой.

Запишите входные и выходные данные для этих подпрограмм, считая, что прямая задаётся двумя точками. Пользуясь данным набором подпрограмм, запишите алгоритмы для определения взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве.

К § 3 «Пространственные фигуры. Начальные представления о многогранниках»

3.3-3.5. Постройте требуемые изображения с помощью графического редактора.

3.19*. Запишите алгоритм, который в зависимости от расположения трёх заданных точек на рёбрах куба определяет, задают ли эти точки единственное сечение куба и в случае утвердительного ответа — какой фигурой является это сечение.

К § 4 «Взаимное расположение двух прямых в пространстве»

Запишите алгоритм, который для двух данных прямых определяет их взаимное расположение. Какие подпрограммы нужны, чтобы реализовать этот алгоритм (например, определение принадлежности точки плоскости и т. п.)? Какие входные и выходные данные нужны для этих подпрограмм? Определите минимальный набор таких инструментов и запишите алгоритм с его помощью.

К § 5 «Параллельность прямой и плоскости»

Запишите алгоритм, который для данной плоскости и данной прямой определяет их взаимное расположение. Определите набор подпрограмм, нужных, чтобы реализовать этот алгоритм, и запишите алгоритм с помощью этих подпрограмм.

К § 6 «Параллельность плоскостей»

Обобщите знания, полученные в изученных параграфах, и запишите алгоритм, позволяющий определять взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

К § 7 «Преобразования фигур в пространстве. Параллельное проектирование»

Изображение объёмной фигуры на листе бумаги или на экране компьютера само по себе является проектированием. Создайте несколько рисунков, иллюстрирующих это утверждение.

Если вы осваиваете *AutoCad*, то постройте несколько тел, известных вам из курса геометрии предыдущих классов (конус, цилиндр, параллелепипед и т. д.), и исследуйте их проекции при разных направлениях проектирования.

К § 8 «Угол между прямыми в пространстве»

Верно ли утверждение: угол между прямыми в пространстве равен углу между их изображениями на экране компьютера? Подтвердите свою точку зрения иллюстрацией в графическом редакторе. Какую фигуру удобнее всего использовать для этого?

К § 9 «Перпендикулярность прямой и плоскости»

9.19. Подтвердите свои выводы иллюстрацией в графическом редакторе. Как следует разместить графические объекты на экране компьютера, чтобы эта иллюстрация была наглядной и достоверной?

К § 10 «Перпендикуляр и наклонная»

Постройте с помощью графического редактора ортогональные проекции известных вам геометрических тел. Как выбрать расположение этих тел относительно плоскости проектирования, чтобы получить наилучшее представление о теле? Исследуйте, какие геометрические фигуры являются проекциями элементов этих тел.

К § 12 «Угол между прямой и плоскостью»

При решении задач на нахождение углов чаще всего можно найти тригонометрические функции этих углов. С помощью какого инструмента калькулятора (либо изучаемого языка программирования) можно перейти от значения тригонометрической функции к величине угла? Какие при этом существуют ограничения и неоднозначности?

К § 13 «Двугранный угол. Угол между плоскостями»

Существуют ли средства графического редактора, позволяющие по изображению двух плоскостей определять угол между ними? Почему?

К § 14 «Перпендикулярные плоскости»

Как целесообразно изображать плоскости, чтобы их перпендикулярность была наглядной? Как фактически может выглядеть на рисунке угол между перпендикулярными плоскостями? Сделайте соответствующие рисунки в графическом редакторе.

К § 15 «Площадь ортогональной проекции многоугольника»

Запишите алгоритм для вычисления площади ортогональной проекции многоугольников, известных вам из курса планиметрии. Включите в алгоритм входные данные, позволяющие классифицировать многоугольники и требовать ввода соответствующих величин их элементов.

*. Запишите алгоритм, который по изображению четырёхугольника и величине угла между плоскостью четырёхугольника и плоскостью проектирования делает вывод о виде четырёхугольника. Рассмотрите отдельно случаи, когда вывод неоднозначен. Поскольку распознавание графических объектов — отдельная сложная область исследований, целесообразно в вашем алгоритме задавать (описывать) изображение четырёхугольника с помощью нескольких вопросов, на которые пользователь будет отвечать «да» или «нет» либо вводить какие-то числовые данные. Какие это будут вопросы?

К § 16 «Призма»

Постройте в графическом редакторе изображение прямой и наклонной призмы, изображение высоты призмы. Постройте несколько сечений призмы. Сделайте вывод о возможной форме сечения призмы в зависимости от расположения секущей плоскости. Постройте проекции призмы на плоскость, параллельную основанию призмы, и на плоскость, параллельную высоте призмы.

К § 17 «Параллелепипед»

Постройте в графическом редакторе изображение параллелепипеда; прямоугольного параллелепипеда. Какие свойства этого тела и свойства параллельного проектирования надо учитывать для получения адекватного изображения?

К § 18 «Пирамида»

Постройте в графическом редакторе изображения различных пирамид. Постройте изображение высоты пирамиды, двугранного угла пирамиды при ребре её основания.

Как с помощью средств графического редактора выяснить, является ли изображённая пирамида правильной?

К § 19 «Усечённая пирамида»

Запишите алгоритм, позволяющий как можно более подробно классифицировать многогранники, изученные в пунктах 16–19.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации. Примерный объём реферата – 10–15 страниц, доклада или компьютерной презентации – 10–20 минут.

Ниже приводятся темы, рекомендуемые для проектной работы и списки литературы. При работе над проектами можно также использовать интернет-ресурсы.

1. Кристаллы

Рекомендуемая литература

Галиулин Р. Как устроены кристаллы // Квант. – 1983. – № 11.

Корепин В. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6.

Кузьмичёва Г.М. Основные разделы кристаллографии: учебное пособие. – М.: МИТХТ, 2002.

Шаскольская М.П. Кристаллы. – М.: Наука, 1985.

Браве О. Кристаллографические этюды. – Л.: Наука, 1974.

2. Можно ли из тетраэдра сделать куб?

Рекомендуемая литература

Каган В. О преобразовании многогранников. – Одесса: Матезис, 1913.

Фукс Д. Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. – 1990. – № 11.

Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры // Сер. Популярные лекции по математике. Вып. 22. – М.: ГИТТЛ, 1956.

Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. – М.: Наука, 1977.

Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Кн. V: геометрия. – М.: Наука, 1966.

3. Теоремы о трёхгранном угле

Рекомендуемая литература

Ивлев Б. Двугранные и трёхгранные углы // Квант. – 1984. – № 12.

Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.

4. Геометрия поверхностей

Рекомендуемая литература

Фукс Д. Лента Мёбиуса // Квант. – 1990. – № 1.

Ефремович В. Пространство и внутренняя геометрия поверхностей // Квант. – 1977. – № 1.

Фукс Д. Геометрия листа бумаги // Квант. – 1988. – № 9.

Оригами // Квант. – 1984. – № 8.

Смирнов С.Г. Прогулки по замкнутым поверхностям. – М.: МЦНМО, 2003.

Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.

5. Правильные и полуправильные многогранники

Рекомендуемая литература

Савченко В. Полуправильные многогранники // Квант. – 1976. – № 1.

Матиясевич Ю. Модели многогранников // Квант. – 1978. – № 1.

Березин В. Правильные многогранники // Квант. – 1989. – № 5.

Вагутен В. Правильные многогранники и повороты // Квант. – 1989. – № 10.

Правильные многогранники // Квант. – 1988. – № 11.

Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.

6. Рекомендуемая литература для выбора дополнительных тем и внеклассной работы

Энциклопедия для детей. Т. 11: математика. – М.: Аванта +, 2003.

Байиф Ж.-К. Логические задачи. – М.: Мир, 1983.

Гаврилова Т.Д. Занимательная математика: 5–11 классы. – Волгоград: Учитель, 2008.

Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. – Челябинск: Взгляд, 2005.

Гарднер М. Математические фокусы и головоломки. – М.: Наука, 1978.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1984.

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.

Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007.

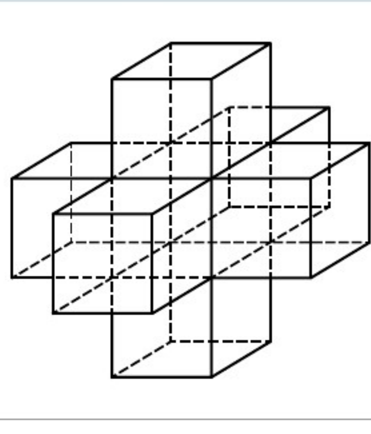
Фарков А.В. Математические олимпиады в школе : 5–11классы. – М.: Айрис-пресс, 2005.

Шикман А.П. Деятели отечественной истории: биографический справочник. – М., 1997.

Ответы и указания к упражнениям

1.21. *Указание*. Точки M, D и K лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и α. **1.24.** 11 см или 3 см. **1.25.** *Указание*. Покажите, что если хотя бы одна из вершин ломаной принадлежит плоскости α, то и четыре другие вершины будут принадлежать этой плоскости. Пусть никакая из точек A, B, C, D и E не принадлежит плоскости α. Тогда можно прийти к следующим выводам. Точки A и D лежат по одну сторону от плоскости α. Также по одну сторону от плоскости α лежат точки B и D. Однако точки A и B должны лежать по разные стороны от плоскости α. Получили противоречие. **1.26.** 1 : 3. **1.27.** 28 см. **2.1.** Бесконечно много или одну. **2.11.** 3 точки. **2.12.** Одна плоскость или три плоскости. **2.18.** Верно. *Указание*. Покажите, что не лежащие на одной прямой точки P, E и Q являются общими для плоскостей ABC и MNK. **2.19.** 32 см^2. **2.20.** 5 см. **3.21.** *Указание*. Найдите точку M пересечения прямых EF и BC и точку N пересечения прямых FK и CD. Тогда прямая MN – линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC. **3.22.** *Указание*. Найдите точку E пересечения прямых NK и BC. Тогда прямая ME – линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC. **3.23.** *Указание*. Найдите точку E пересечения прямых MK и AC. Тогда прямая NE – линия пересечения плоскости сечения и плоскости ADC. **3.26.** *Указание*. Найдите точку P пересечения прямых EF и BC и точку N пересечения прямых EK и AB. Тогда прямая MP – линия пересечения плоскости сечения и плоскости основания. **3.27.** *Указание*. Найдите точку F пересечения прямых B_1C_1 и BE. Тогда прямая A_1F – линия пересечения плоскости сечения и плоскости $A_1B_1C_1$. **3.28.** Неверно. *Указание*. См. рис. **3.30.** Не может. *Указание*. Если четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ являются изображениями граней многогранника, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, AD и A_1D_1 принадлежат одной прямой. **3.31.** 72°, 108°, 72°, 108°. **3.32.** 4 : 9. **4.9.** Скрещивающиеся. **4.10.** Пересекаются или параллельны. **4.23.** 4 см. **4.24.** 6 см. **4.25.** 9 см. **4.26.** 35 см или 17 см. **4.28.** 1 : 2. **5.13.** 7,5 см. **5.14.** 8 : 3. **5.15.** *Указание*. Докажите, что $\Delta ABC \backsim \Delta EBF$, и воспользуйтесь равенством углов подобных треугольников. **5.19.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **5.20.** $(4\sqrt{3}+2)$ см. **5.22.** $a(2+\sqrt{2})$. **5.27.** *Указание*. Проведите плоскость, проходящую через прямую a и точку M. **5.30.** 60 см. **5.31.** 28 см. **5.39.** *Указание*. Плоскость BMN пересекает плоскость основания по прямой, параллельной прямой ED. **5.40.** 8 см, 12 см. **5.41.** 156 см^2. **6.13.** 2) 24 см. **6.16.** $\frac{2a(2\sqrt{2}+3)}{3}$. **6.17.** $a(2+\sqrt{2})$. **6.18.** *Указание*. Чтобы найти пересечение секущей плоскости с гранью BB_1C_1C, проведите через точку N прямую, па-

Рис. к упражнению 3.28



раллельную прямой MK. **6.19.** *Указание*. Чтобы найти пересечение секущей плоскости с гранью $ABCD$, проведите через точку E прямую, параллельную прямой FK. **6.31.** *Указание*. Если предположить, что плоскости BCD и AFE параллельны, то $AB = DE$. **6.32.** 3 : 2. *Указание*. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Тогда плоскость, проходящая через точки M и N параллельно плоскости BC_1D, пересекает прямую AC в точке K, такой, что $MK \parallel DO$, $KN \parallel C_1O$. Обозначим через F точку пересечения прямых KN и A_1C_1. Тогда искомое отношение равно $KC : FA$. **6.34.** 1,5. **7.13.** 9 см. **7.24.** *Указание*. Воспользовавшись ключевой задачей 7.23, докажите, что данное преобразование фигуры является движением. **7.33.** *Указание*. Проведите какую-нибудь хорду эллипса, параллельную отрезку A_1B_1. **7.38.** Существует. *Указание*. Рассмотрите параллельную проекцию правильного пятиугольника. **7.39.** 60°. **7.40.** 45°. **8.4.** 60°. **8.5.** 1) 90°; 2) 40°. **8.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **8.7.** 80°. **8.8.** 10 см. **8.9.** 10 см. **8.10.** 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **8.11.** α или $180° - \alpha$. **8.12.** 90°. *Указание*. Докажите, что искомый угол равен углу между прямыми OB_1 и AC, а также докажите, что треугольник AB_1C равнобедренный. **8.13.** 60°. **8.14.** *Указание*. Докажите, что треугольник ED_1F равнобедренный. **8.15.** 90°. *Указание*. Докажите, что четырёхугольник $EFMK$ – прямоугольник. **8.16.** 60°. **8.17.** 52 см. **8.18.** 3 см. **9.8.** 2 см. **9.9.** $2\sqrt{5}$ см. **9.10.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.11.** 8 см. **9.18.** Прямая перпендикулярна плоскости или лежит в этой плоскости. **9.20.** 9 см. **9.21.** *Указание*. Пусть точка K – середина отрезка BC. Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости AKD. **9.25.** *Указание*. Воспользуйтесь методом доказательства от противного. **9.26.** 12 см. **9.27.** 14 см. **9.28.** 17 см. **9.29.** $3\frac{1}{3}$ см. **9.30.** 23 см. **9.34.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$. **9.35.** *Указание*. Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BCD. **9.36.** *Указание*. Докажите, что линия пересечения плоскостей ABM и CDM параллельна прямой CD. **9.37.** *Указание*. Докажите, что $AD \parallel EF$. **9.38.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **9.39.** 45°. *Указание*. Отметьте на отрезке KB точку N так, чтобы $MN \parallel CK$. Искомый угол равен углу между прямыми SM и MN. **9.40.** 12 см. **9.41.** 1) 8 см; 2) 60°, 120°. **10.5.** 7 см. **10.6.** 12 см. **10.14.** $5\sqrt{2}$ см. **10.18.** 15 см. **10.19.** 15 см, 13 см. **10.20.** $2\sqrt{2}$ см. **10.21.** $2\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\sqrt{6}$ см. **10.22.** 3 см. **10.23.** 12 см. **10.24.** $\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$. **10.25.** 10 см. **10.26.** 5 см. **10.27.** $3\sqrt{41}$ см. **10.28.** 4 см, $\sqrt{55}$ см, $3\sqrt{3}$ см. **10.29.** 9 см. **10.30.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **10.31.** $\frac{a}{2}$. **10.32.** 40 см². **10.33.** 12 см. **10.34.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.35.** 120°. **10.36.** 8 см. **10.37.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см. **10.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **10.39.** *Указание*. Пусть точки A_1, B_1, C_1, D_1 и O_1 – основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A, B, C, D и O на плоскость α. Тогда $OO_1 \leqslant OM$. Воспользуйтесь тем, что отрезок OO_1 является средней линией каждой из трапеций AA_1C_1C

и BB_1D_1D. **10.40.** $4\sqrt{3}$ см. **10.41.** $\frac{120}{7}$ см. **11.10.** 17 см. **11.11.** 8 см. **11.12.** 10 см. **11.13.** 5 см. **11.14.** $3\sqrt{5}$ см. **11.15.** 2 см. **11.16.** 4 см. **11.18.** 20 см. **11.19.** $3\sqrt{10}$ см. **11.20.** 28 см или 12 см. **11.21.** 90°. **11.23.** *Указание*. Пусть точка K – середина ребра CD. Докажите, что ΔAMK – искомое сечение. **11.24.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **11.25.** 18 см. **11.26.** 58,5 см^2. *Указание*. Докажите, что ΔACM прямоугольный, где M – проекция точки B на плоскость α. **11.28.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. *Указание*. Через точку C проведём прямую l, перпендикулярную прямой CK. Из точки M опустим перпендикуляр MP на прямую l. Плоскость SMP параллельна прямой CK. Опустим из точки C перпендикуляр CF на прямую SP. Длина отрезка CF равна искомому расстоянию. **11.29.** 15 см. **11.30.** 243 см^2. **12.7.** 30°. **12.10.** 30°. **12.11.** $6\sqrt{2}$ см. **12.12.** 3 см. **12.13.** $8\sqrt{2}$ см. **12.14.** $3\sqrt{10}$ см. **12.15.** 6 см. **12.16.** $3\sqrt{14}$ см. **12.17.** 30°. **12.18.** $2\sqrt{6}$ см, $\sqrt{15}$ см. **12.19.** 45°. **12.20.** $4\sqrt{7}$ см. **12.21.** 45°. **12.22.** 1) 30°; 2) 60°. **12.23.** 1) 45°; 2) 30°. **12.24.** 45°. **12.25.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **12.26.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **12.27.** 45°. **12.28.** 45°. **12.29.** 60°. **12.30.** 30°. **12.31.** 45°. **12.32.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.33.** 30°. **12.34.** 15 см, 40 см. **13.4.** 35 см. **13.5.** 24 см. **13.6.** 105°. **13.7.** 70°. **13.10.** 60°. **13.11.** 60°. **13.16.** 80°. **13.18.** 60°. **13.19.** $\sqrt{5}$ см. **13.20.** 120°. **13.21.** 45°. **13.22.** 60°. **13.23.** 60°. **13.24.** 30°. **13.25.** 45°. **13.26.** 50 см^2. **13.27.** 6 см. **13.28.** $4\sqrt{2}$ см. **13.29.** 45°. **13.30.** 60°. **13.31.** $2\sqrt{13}$ см. **13.32.** 60°. **13.33.** 16 см. **13.34.** 60°. **13.35.** 3 см или 9 см. **13.36.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **13.37.** 90°. **13.38.** $\frac{1}{2}$. **13.39.** $\arccos\frac{1}{3}$. *Указание*. Воспользовавшись задачей 11.27, докажите, что угол между данными плоскостями равен углу между прямыми A_1C и B_1D. **13.40.** 36 см^2. **13.41.** 26 см. **14.5.** 2) $5\sqrt{2}$ см, 13 см. **14.6.** 45°. **14.7.** $3\sqrt{2}$ см. **14.14.** 25 см. **14.15.** 8 см. **14.16.** 45°. **14.17.** 30°, 60°. **14.18.** 1) $2\sqrt{15}$ см; 2) 8 см. **14.19.** 13 см. **14.24.** 3) $20\sqrt{13}$ см^2. **14.25.** 3) 60 см^2. **14.26.** 60°. **14.27.** $10\sqrt{3}$ см. **14.28.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) a. **14.29.** $2\sqrt{337}$ см. **14.30.** 5 см. **14.31.** 4,8 см. *Указание*. Пусть точка O – центр треугольника ABC, точка D – середина стороны AB. Докажите, что плоскости AMB и DMO перпендикулярны. **14.32.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см. **14.33.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{5}$. **14.34.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **14.35.** 216 см^2. **15.5.** $\arccos\frac{4}{5}$. **15.9.** 84 см^2. **15.11.** $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **15.12.** 30°. **15.13.** 45°. **15.14.** 20 см^2. **15.15.** $\frac{a^2}{\cos\alpha}$, если $0° \le \alpha \le 45°$, или $\frac{a^2}{\sin\alpha}$, если $45° < \alpha \le 90°$. **15.16.** $\frac{2\sqrt{14S\cos\alpha}}{7}$. **15.17.** *Указание*. Пусть φ – угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, S и S_1 – площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Тогда

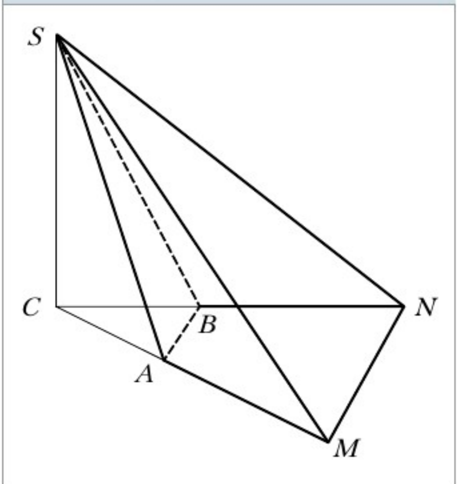
$\cos\varphi = \dfrac{S_1}{S} \le \dfrac{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1C_1}{\frac{1}{2}AB \cdot AC\sin 60^\circ} < \dfrac{1}{2}$. **15.19.** $\dfrac{b^2 \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **16.10.** 18 см². **16.11.** $32\sqrt{2}$ см². **16.18.** 8 см. **16.19.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45°. **16.20.** $2a$, $a\sqrt{5}$. **16.21.** $\dfrac{2a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$, $2a\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$. **16.22.** 9 см. **16.23.** 48 см². **16.24.** 1250 см². **16.25.** 1) $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **16.26.** $\dfrac{a^2\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos\beta}$. **16.27.** 1) $\dfrac{1}{2}d\operatorname{tg}\beta$; 2) $\dfrac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}$. **16.28.** 60°. **16.29.** 45°. **16.30.** 7 см. **16.31.** 6 см. **16.32.** $(108+72\sqrt{6})$ см². **16.33.** $2S\sqrt{2}$. **16.34.** $(18+12\sqrt{7})$ см². **16.35.** 1) 522 см²; 2) 240 см². **16.36.** 6 см, 8 см или 8 см, 6 см. **16.37.** 360 см². **16.38.** 15 см. **16.39.** $24\sqrt{3}$ см². **16.40.** 20 см². **16.41.** $\dfrac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha$. **16.42.** $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.43.** 2) $a^2(1+\sqrt{2})$. **16.44.** 2) $a^2(\sqrt{3}+1)$. **16.45.** 60°. *Указание*. Достройте данную призму до куба $ADBCA_1D_1B_1C_1$. Тогда искомый угол равен углу D_1AC_1. **17.5.** 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{13}$. **17.6.** 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{6\sqrt{74}}{37}$. **17.7.** 7 см. **17.8.** 2 см, 4 см, 4 см. **17.9.** $a\sqrt{3}$. **17.10.** $36\sqrt{2}$ см². **17.11.** 18 см² или 16 см². **17.12.** $\dfrac{2d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **17.13.** $144\sqrt{2}$ см². **17.14.** $12(\sqrt{2}+2)$ см². **17.15.** $4(5\sqrt{3}+4)$ см². **17.16.** 21 см. **17.17.** 17 см. **17.19.** 1) $3\sqrt{6}$ см; 2) $36\sqrt{2}$ см². **17.20.** 4 см. **17.21.** $2d^2\sin\alpha(\sin\beta + \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha})$. **17.22.** $\dfrac{2a^2\sin\alpha(\cos\beta + \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha})}{\cos^2\beta}$. **17.23.** $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **17.24.** $\sqrt{\dfrac{S_1S_2}{2S}}$. **17.25.** $32\sqrt{3}$ см². **17.26.** 2 см. **17.27.** 64 см². **17.28.** 2 см. **17.29.** $8\sqrt{6}$ см. **18.13.** $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ см². **18.14.** $16\sqrt{3}$ см². **18.15.** 6 см. **18.16.** 20 см, $\sqrt{281}$ см, 20 см, $\sqrt{281}$ см. **18.17.** $\dfrac{1}{2}b^2\sin 2\beta$. **18.18.** $\dfrac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **18.20.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$. **18.21.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **18.22.** 3) 24 см². **18.23.** 20 см. **18.24.** *Указание*. Докажите, что апофема равна половине стороны основания пирамиды. **18.25.** 1) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$; 2) 45°. **18.26.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}$. **18.27.** $\dfrac{d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **18.28.** 72 см². **18.29.** $75\sqrt{6}$ см². **18.31.** 20 см. **18.32.** $5\sqrt{3}$ см. **18.33.** $8\sqrt{3}$ см². **18.34.** $5\sqrt{2}$ см. **18.36.** 1) $32\sqrt{2}$ см²; 2) 2 см. **18.37.** 1) $20\sqrt{3}$ см²; 2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **18.38.** 1) 160 см²; 2) $4\sqrt{3}$ см. **18.39.** 1) 4 см; 2) $(32+8\sqrt{10}+24\sqrt{2})$ см². **18.40.** 360 см². **18.41.** 660 см².

18.42. 105 см². **18.43.** $2\arcsin\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **18.44.** $2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **18.45.** $\dfrac{6d^2\sqrt{3}}{\sin 2\alpha\sin\alpha}$.

18.46. $\dfrac{8m^2}{\sin 2\beta\cos\beta}$. **18.47.** 2) 36 см². **18.48.** 2) 6 см². **18.49.** 180 см². **18.50.** 240 см².

18.51. $(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})$ см². **18.52.** $\dfrac{a^2\sin\alpha(1+\sin\beta)}{\cos\beta}$. **18.53.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **18.54.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см или $8\sqrt{3}$ см. **18.55.** $\dfrac{1}{4}$ см². *Указание*. Докажите, что все указанные в условии сечения являются прямоугольниками, периметр каждого из которых равен 2 см. **18.56.** Существует. *Указание*. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$, боковое ребро SC которой перпендикулярно плоскости основания. На продолжении рёбер CA и CB за точки A и B соответственно выберем точки M и N (см. рис.). Пирамида $SMABN$ является искомой. **18.57.** *Указание*. Пусть данный треугольник является основанием правильного тетраэдра $SABC$. Рассмотрите треугольник SA_1C_1. **18.58.** 1 : 9. **18.59.** $\dfrac{1701}{32}$ см². **19.1.** 8 см, 12 см. **19.2.** 7 см. **19.3.** $45\sqrt{6}$ см². **19.4.** 90 см². **19.5.** 1) 12 см; 2) $32\sqrt{2}$ см²; 3) $64\sqrt{5}$ см². **19.6.** 1) $2\sqrt{6}$ см; 2) $168\sqrt{15}$ см². **19.7.** 2 см. **19.8.** 1 см. **19.9.** 24 см².

Рис. к упражнению 18.56



19.10. $12\sqrt{10}$ см². **19.11.** $(104+65\sqrt{3})$ см². **19.12.** $6(2+\sqrt{13}+\sqrt{3})$ см².

19.13. $2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **19.14.** $\dfrac{(a-b)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}$. **19.15.** 25π см². **19.16.** 60°, 75° или 120°, 15°. **20.14.** 11 см. **20.27.** $36\sqrt{3}$ см². **20.28.** 31 см. **20.32.** 2) 60°.

20.33. 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$; 3) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **20.34.** 26 см, $8\sqrt{10}$ см. **20.36.** $\dfrac{2a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

20.37. 2) $3\sqrt{2}$ см. **20.39.** 2,4 см. **20.40.** 4,5 см. **20.42.** 10 см. **20.43.** $25\sqrt{3}$ см².

20.46. 6 см. **20.47.** 13 см. **20.48.** 13 см. **20.49.** 8 см. **20.50.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **20.51.** $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ см².

20.52. $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$. **20.54.** 60°. **20.55.** $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)$. **20.56.** $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **20.57.** $\dfrac{h}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

20.58. 90°. **20.59.** $\operatorname{arctg} 4$. **20.60.** $\arccos\dfrac{1}{3}$. **20.61.** 6 см. **20.62.** $4\sqrt{3}$ см. **20.63.** *Указание*. Постройте линейный угол данного двугранного угла, стороны которого параллельны соответственно высотам треугольников CAD и CBD, опущенным на сторону CD, причём одна из сторон этого угла проходит через точку E. **20.65.** 15 см. **20.66.** 41 см. **20.69.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см². **20.70.** 45°. **20.71.** $5\sqrt{7}$ см. **20.72.** 30 см, 20 см, 18 см. **20.73.** 192 см². **20.74.** $12\sqrt{17}$ см². **20.75.** $12a^2 \operatorname{tg} \alpha$. **20.76.** $a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. **20.77.** $96\sqrt{2}$ см². **20.78.** $36\sqrt{2}$ см². **20.79.** 45°. **20.80.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.81.** 408 см². **20.82.** $2a^2\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta + \sin\alpha\right)$. **20.83.** 120°, 60°. **20.84.** $2S$. **20.85.** 2) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **20.86.** $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2\cos\alpha}$. **20.87.** $150\sqrt{3}$ см². **20.88.** 1250 см². **20.89.** 600 см². **20.90.** 45°, 90°, 90°, 45°. **20.91.** $50(3 + 2\sqrt{3})$ см². **20.92.** 84 см².

Ответы к задачам из рубрики «Когда сделаны уроки»

«Стереометрическое» расположение двух прямых

2. Нет. *Указание*. Проведите параллельные плоскости, в которых лежат данные скрещивающиеся прямые. **3.** *Указание*. 1) Проведём плоскость, проходящую через прямую a и параллельную прямой c. Эта плоскость пересекает прямую b в точке B. Проведём через точку B прямую, параллельную прямой c. Проведённая прямая является искомой; 2) утверждение следует из того, что любая прямая, пересекающая прямую a и параллельная прямой c, лежит в плоскости, проведённой в решении п. 1). **4.** *Указание*. Для каждой пары данных скрещивающихся прямых проведём параллельные плоскости, в которых лежат эти прямые. Проведённые плоскости при пересечении образуют искомую призму. **5.** *Указание*. Рассмотрим проекцию данного тетраэдра на плоскость, перпендикулярную прямой CN. Тогда проекцией грани ABD будет равнобедренный треугольник $A_1B_1D_1$. Поэтому его высота D_1C_1 будет являться также и медианой. Проекцией отрезка AM будет медиана A_1M_1, а прямой BK – прямая B_1K_1, делящая медиану D_1C_1 в отношении 2 : 1. Поэтому отрезок B_1K_1 также является медианой равнобедренного треугольника $A_1B_1D_1$. Поскольку расстояния от середины основания до медиан, проведённых к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны, то равны и расстояния от прямой CN до прямых AM и BK.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление